

תרגילי בית 3-4:
ע"מ 27: 6.12, 6.20, 6.30 א, ב, 6.34, 6.35, 6.41

הערה: עבור מטריצות $A \in F^{n \times m}, B \in F^{k \times r}$ הסכום הישר ביניהן היא מטריצה $(n+k) \times (m+r)$ אשר הבלוקים A, B באלכסונה והיתר אפסים: $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, באופן פרטי כשאחת מהן

$$A \oplus 0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ מטריצת האפס אז:}$$

ע"מ 33 והלאה: 1.1 וחצי אבל עבור המקרה הכללי יותר $F^{n \times m}$, ולא כפי שמופיע עבור הריבועיות, 1.5, 2.2, 2.7, 2.8, 2.11, 4.3, 4.8, 4.9

6.12 תרגיל. יהיו $A, B \in F^{n \times n}$. הוכח: AB הפיכה $\Leftrightarrow A$ הפיכה וגם B הפיכה. [רמז: אם AB הפיכה אז e כק C $A(BC) = (AB)C = I$ וכן (מרצות?) A הפיכה. בדומה עבור B .]

פתרון:

\Leftarrow :

$$\exists D: (AB)D = I \wedge D(AB) = I \Rightarrow \exists D: A(BD) = I \wedge (DA)B = I \Rightarrow BD = A^{-1} \wedge DA = B^{-1}$$

\Rightarrow :

$$\exists C, D: AC = CA = I \wedge BD = DB = I \Rightarrow (AB)(DC) = A(BD)C = AIC = AC = I \Rightarrow DC = (AB)^{-1}$$

6.20 תרגיל! א. בהתאם לסימונים של התרגיל הקודם, הוכח ש A מאפסת את הפולינום $f(x) = x^2 - \text{tr}(A) \cdot x + \Delta$. [בדוק ע"י הצבה]
ב. השתמש ב(א) להוכיח את התרגיל הקודם בדרך אחרת.
ג. יהיו $A, B, C \in F^{2 \times 2}$. הוכח: $(AB - BA)^2 C = C(AB - BA)^2$. [רמז: תהא $A \in F^{2 \times 2}$ עם עיקבה אפס. הוכח ש A^2 היא סקלרית]

פתרון:

א. ע"י הצבה (מציבים A במקום x) וחשוב ישיר.

ב. נניח תחילה ש $\Delta \neq 0$. על פי סעיף א' מתקיים: $A^2 - \text{tr}(A)A = -\Delta I$ ומכיוון ש $\Delta \neq 0$

$$\text{נחלק בה: ונקבל } -\frac{1}{\Delta}(A^2 - A \text{tr} A) = I \Leftarrow \underbrace{A \frac{1}{-\Delta}(A - \text{tr} A)}_{A^{-1}} = I \text{ ולכן נקבל:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ג. ידוע כי העקבה מקיימת את שתי התכונות: $tr(AB) = tr(BA)$ ו $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$, ולכן

$$tr(AB) - tr(BA) = 0$$

בנוסף קל להוכיח שאם $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ו $tr(A) = 0$ אז A^2 סקלרית. ז"א קיים $\alpha \in \mathbb{R}$ שעבורו

$$C(\alpha I) = (\alpha I)C \text{ ואז } (AB - BA)^2 = \alpha I$$

6.30 תרגיל. חשב את המטריצה ההופכית עבור כל אחת מהמטריצות הבאות:

$$א. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ב. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$א. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

6.34 תרגיל. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. מצא בעזרת A^{-1} את הפתרון הכללי של המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

פתרון:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ולכן } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

נרשום את המשוואות בצורה הבאה:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & -1 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

נחשב את $A^{-1}B$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+s-t \\ 2-2s+t \\ 3-s-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-9s-5t \\ -1+3s \\ 1+s+t \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -1-9s-5t, x_2 = -1+3s, x_3 = 1+s+t, x_4 = s, x_5 = t$$

6.35 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה.

א. הוכח שלכל k טבעי, $(A^{-1})^k = A^{-k}$.

ב. הוכח שלכל k טבעי, $(A^k)^{-1} = A^{-k}$.

ג. הסק שלכל a, b שלמים (לאו דוקא חיוביים) מתקיים $(A^a)^b = A^{ab} = (A^b)^a$.

ד. $A^a \cdot A^b = A^{a+b} = A^b \cdot A^a$.

פתרון:

נעשה רק את סעיפים א+ב

□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□

א+ב. $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$ ולכן $A^k (A^{-1})^k = A \cdot A \dots \cdot A A^{-1} \cdot A^{-1} \dots \cdot A^{-1} = I$

קל להראות באינדוקציה ש $(A^{-1})^k = A^{-k}$

6.41 תרגיל! תהא A מטריצה ריבועית.

א. נניח שקיים מספר טבעי n כך ש $A^n = I$. הוכח ש A הפיכה.

ב. תהא A מטריצה הפיכה מעל שדה סופי (למשל \mathbb{Z}_p) הוכח שקיים n טבעי כך ש $A^n = I$.

ג. מצא מטריצה הפיכה A כך שלכל מספר טבעי n , $A^n \neq I$ (אפי' (n) האטריצה צריכה להיות אצל שדה אינסופי).

פתרון:

א. A ריבועית, $A^n = I$; אזי $I = A^n = AA^{n-1} = A^{n-1}A$ ולכן $A^{-1} = A^{n-1}$.

ב. יהי שדה סופי עם p איברים, בכל מטריצה ריבועית יש n^2 מקומות ובכל אחד מהם יש p

אפשרויות ולכן יש סה"כ $p^{(n^2)}$ אפשרויות ולכן בקבוצה $\left\{ A, A^2, \dots, A^{\binom{n^2}{p}+1} \right\}$ יש לפחות שתי

מטריצות שוות.

ז"א קיימים שני איברים $i \neq j$ (נניח בלי הגבלת הכלליות ש $i > j$) המקיימים $A^i = A^j$. נתון ש A הפיכה ולכן גם A^j הפיכה וההופכית שלה היא A^{-j} . נסמן $n := i - j$ ונקבל $A^n = A^{i-j} = I$.

ג. בשדה אינסופי המאפיין הוא אפס ולכן עבור $A = 2I$ נקבל $A^n = 2^n I$ מכיוון שהמאפיין הוא אפס לא קיים $n \in \mathbb{N}$ המקיים $2^n = 1$.

1.1.1 תרגיל. הוכח ש \mathbb{F}^n וכן $F^{n \times m}$ הם מרחבים וקטורים.

פתרון:

$F^{n \times m}$:

$$1. \forall a_{ij}, b_{ij} \in F: \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \quad a_{ij} + b_{ij} \in F \Rightarrow$$

$$\forall A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in F^{n \times m} \quad A+B=(a_{ij}+b_{ij}) \in F^{n \times m}$$

$$2. \forall a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in F: \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \quad (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) \Rightarrow$$

$$\forall A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij}) \in F^{n \times m} \quad (A+B)+C=(a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij})=A+(B+C)=(a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij})$$

$$3. \forall a_{ij}, b_{ij} \in F: \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \quad a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij} \Rightarrow$$

$$\forall A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in F^{n \times m} \quad A+B=(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})=B+A$$

$$4. \forall a_{ij} \in F: \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \quad a_{ij}+0=a_{ij} \Rightarrow \forall A=(a_{ij}) \in F^{n \times m} \quad A+(0)=(a_{ij}+0)=A$$

$$5. \forall a_{ij} \in F: \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \quad \exists -a_{ij} \in F: a_{ij}+(-a_{ij})=0 \Rightarrow$$

$$\forall A=(a_{ij}) \in F^{n \times m}, \exists -A=(-a_{ij}) \in F^{n \times m} \quad A+(-A)=(a_{ij}+(-a_{ij}))=(0)$$

6.

$$a. \forall a_{ij}, k \in F: \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \quad k \cdot a_{ij} \in F \Rightarrow \forall A=(a_{ij}) \in F^{n \times m} \quad kA=(ka_{ij}) \in F^{n \times m}$$

$$b. \forall a_{ij}, k, h \in F: \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \quad k(h \cdot a_{ij})=(kh)a_{ij} \in F \Rightarrow$$

$$\forall A=(a_{ij}) \in F^{n \times m} \quad k(hA)=(k(ha_{ij}))=((kh)a_{ij})=(kh)A$$

$$c. \forall a_{ij}, 1 \in F: \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \quad 1 \cdot a_{ij}=a_{ij} \Rightarrow \forall A=(a_{ij}) \in F^{n \times m} \quad 1 \cdot A=(1 \cdot a_{ij})=A$$

$$d1. \forall a_{ij}, b_{ij}, k \in F: \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \quad k(a_{ij}+b_{ij})=ka_{ij}+kb_{ij} \Rightarrow$$

$$\forall A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in F^{n \times m} \quad k(A+B)=(k(a_{ij}+b_{ij}))=(ka_{ij}+kb_{ij})=kA+kB$$

$$d2. \forall a_{ij}, h, k \in F: \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \quad (h+k)a_{ij}=ha_{ij}+ka_{ij} \Rightarrow$$

$$\forall A=(a_{ij}) \in F^{n \times m} \quad (h+k)A=((h+k)a_{ij})=(ha_{ij}+ka_{ij})=hA+kA$$

$$F^n = F^{n \times 1} = F^{n \times m} : m = 1 \Rightarrow \text{פרטי מקרה}$$

1.5 תרגיל. הוכח שמרחב המכפלה הוא אכן מרחב וקטורי.

מכיוון ש U, V מ"ו, ניתן להוכיח בקלות רבה את כל תכונות המרחב הוקטורי עבור מרחב המכפלה $U \times V$.

2.2 תרגיל. עיין בתרגיל 1.4 לעיל. האם ניתן לומר ש:

א. \mathbb{F} תת-מרחב של V ?

ב. V כמרחב וקטורי מעל \mathbb{H} הוא תת-מרחב של V (כמרחב וקטורי מעל \mathbb{F})?

פתרון:

א. לא, F קבוצת סקלרים ו- V קבוצת וקטורים ולכן F לא מוכלת בהכרח ב- V . לדוגמא $R = F$ ו- $V = R^2$.

ב. לא, ע"פ הגדרה ת"מ וקטורי צריך להיות מוגדר מעל אותו שדה של המרחב בו הוא מוכל (ע"מ שיהיו ל- H את כל הסקלרים הנדרשים לקיום סגירות).

2.7 תרגיל. הקריטריון הקצר ביותר בעולם. יהא V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} , ונניח ש $W \subseteq V$ מקיימת: $0 \neq W$

ולכל $u, w \in W$ ו $\alpha \in \mathbb{F}$ $u + \alpha w \in W$. הוכח ש W תת-מרחב של V .

פתרון:

$$1 \in \mathbb{F} \Rightarrow \forall u, v \in W \quad u + 1 \cdot v = u + v \in W \quad 1.$$

2. נובע מאוסוציאטיביות החיבור ב- V

3. נובע מקומוטטיביות V

6: d2: נובע מדיסטריוטיביות V

4. ע"ס 1 ו-2d6:

$$-1 \in \mathbb{F} \Rightarrow \forall u \in W \subseteq V \quad 0_V = (1 + (-1))u = u + (-1)u \in W$$

6a. ע"ס 1:

$$\forall u \in W \quad \underbrace{u + \dots + u}_k = ku \in W$$

5. ע"ס 6a:

$$\forall u \in W \quad u \in V \Rightarrow (-1)u = -u \in W$$

6b. מאוסוציאטיביות הכפל V

$$\forall u \in W \quad u \in V \Rightarrow 1 \cdot u = u \quad .c6$$

$$\forall u, v \in W \quad u, v \in V \Rightarrow k \cdot (u + v) = ku + kv \quad .1d6$$

2.8 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי, ויהיו W, U תת-מרחבים של V כך ש $W \subseteq U$. הוכח ש W תת-מרחב של U .

פתרון:

נתון $W \subseteq U$.

כמו כן W ת"מ של V ולכן: $\forall u, v \in W, k \in F \quad u + kv \in W$
 לבסוף, U, W שומרות על פעולות V כתתי מרחבים שלה ולכן W שומרת על פעולות U .
 בסה"כ W ת"מ של U .

2.11 תרגיל. א. יהיו U, V מרחבים וקטוריים מעל שדה F . הוכח ש $U \times \{0_V\}$ וכן $\{0_U\} \times V$ תת-מרחבים של $U \times V$.

ב. הוכח שלכל $\alpha, \beta \in F, V = \{(\alpha x, \beta x) : x \in F\}$ תת-מרחב של $F \times F$.

פתרון:

ע"פ הקריטריון שהוכח ב-2.7:

א.

$$\forall u, v \in U, k \in F \quad u + kv \in U \Rightarrow (u, 0), (v, 0) \in U \times \{0\}, k \in F \quad ((u, 0) + k(v, 0)) = (u + kv, 0) \in U \times \{0\}$$

$$\forall u, v \in V, k \in F \quad u + kv \in V \Rightarrow (0, u), (0, v) \in \{0\} \times V, k \in F \quad ((0, u) + k(0, v)) = (0, u + kv) \in \{0\} \times V$$

ב.

$$\forall x, y \in F, k \in F \quad x + ku, y + kv \in F \Rightarrow$$

$$\forall (\alpha x, \beta y), (\alpha u, \beta v) \in V \quad (\alpha x, \beta y) + k(\alpha u, \beta v) = (\alpha x, \beta y) + (k\alpha u, k\beta v) = (\alpha(x + ku), \beta(y + kv)) \in V$$

4.3 תרגיל. הוכח או הפרך:

א. יהיו U, V, W תת-מרחבים של מרחב וקטורי, אזי $U \cap (V + W) = U \cap V + U \cap W$.

ב. יהיו U, V, W תת-מרחבים של מרחב וקטורי, אזי $U \cap (V + W) \neq U \cap V + U \cap W$.

ג. יהיו U, V, W תת-מרחבים של מרחב וקטורי, אזי $U \cap (V + W) \subseteq U \cap V + U \cap W$.

פתרון:

נתבונן במרחב וקטורי \mathbb{Z}_2^2 ובתתי מרחבים הבאים:

א.

$$U := \{(0,0), (1,1)\}, V := \{(0,0), (0,1)\}, W := \{(0,0), (1,0)\}$$

$$V + W = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

$$U \cap (V + W) = U$$

$$\{(0,0)\} = U \cap V + U \cap W \neq U$$

ב,ג דומה מאוד.

או למשל:

א. $U = \text{span}\{(1,1)\}, V = \text{span}\{(0,1)\}, W = \text{span}\{(1,0)\}$ אזי:

$$.U = U \cap (V + W) \neq U \cap V + U \cap W = \{(0,0)\}$$

ב. אם $U = V = W$ אז מתקיים שוויון.

ג. אותה דוגמא כמו ב-א'.

4.8 תרגיל. מצא $U_i, V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ תת-מרחבים, כך ש: א. $U_1 + V_1 = \{0\}$. ב. $U_2 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$.

א. $U_1, V_1 = \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$

ב. $U_2 = \text{Span}\{e_2, e_4, \dots, e_{2i}\}, i = 1 \dots \frac{n}{2}$

$$V_2 = \text{Span}\{e_1, e_3, \dots, e_{2i-1}\}$$

(כאשר e_k זהו ווקטור בסיס סטנדרטי).

דוגמא נוספת - $U_2 = \mathbb{R}^n, V_2 = \{0\}$

הערה: עבור מטריצות $A \in F^{n \times m}, B \in F^{k \times r}$ הסכום הישר ביניהן היא מטריצה $(n+k) \times (m+r)$

אשר הבלוקים A, B באלכסונה והיתר אפסים: $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, באופן פרטי כשאחת מהן

מטריצת האפס אז: $A \oplus 0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.9 תרגיל. יהיו $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ ו $B \in \mathbb{F}^{k \times r}$. ויהיו:

$$V_1 - \text{מרחב הפתרונות של } (A \oplus O) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$V_2 - \text{מרחב הפתרונות של } (O \oplus B) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = 0$$
$$V_3 - \text{מרחב הפתרונות של } (A \oplus B) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{r+m} \end{pmatrix} = 0. \text{ הוכח ש } V_3 = V_1 \oplus V_2.$$

±:

$$\forall v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} \in V_3 \quad (A \oplus B) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} = 0 \wedge \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{0} = (A \oplus B) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} = (A \oplus 0) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (A \oplus 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} + (0 \oplus B) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (0 \oplus B) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} =$$

$$(A \oplus 0) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (0 \oplus B) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} \in V_2$$

ד:

$$v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \wedge v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} \Rightarrow x_i = y_j = 0, \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r \Rightarrow v = 0$$

ובסה"כ סכום ישר.