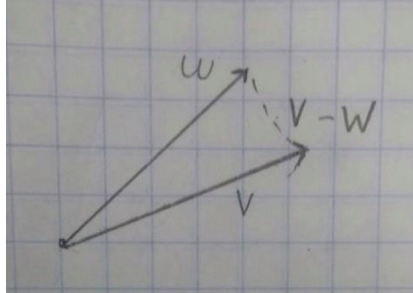


הגדרה

המרחק מ- v ל- w , מוגדר ע"י הנוסחה: $d(v, w) = \|v - w\|$.

המחשה



תכונות

$$1. \quad v = w \Leftrightarrow d(v, w) = 0 \quad d(v, w) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$2. \quad d(v, w) = d(w, v)$$

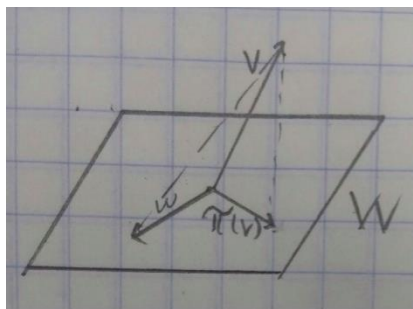
$$3. \quad d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, v)$$

תרגיל: הוכיחו!

משפט

ההיטל של ווקטור v על תת מרחב W , הוא הווקטור ב- W , הקרוב ביותר ל- v .

המחשה



$$d(v, \pi(v)) = \min\{d(v, w) : w \in W\}$$

תזכורת (משפט פיתגורס)

$$\text{אם } u \perp u', \text{ אזי } \|u + u'\|^2 = \|u\|^2 + \|u'\|^2$$

הוכחה

ידוע ש $v - \pi(v) \in W^\perp$.

לכן, לכל $w \in W$ $v - \pi(v) \perp w - \pi(v)$.

לכן, לפי משפט פיתגורס:

$$\|v - w\|^2 = \|v - \pi(v)\|^2 + \|\pi(v) - w\|^2 \geq \|v - \pi(v)\|^2$$

$$\|v - w\| \geq \|v - \pi(v)\|$$

$$d(v, w) \geq d(v, \pi(v))$$

שוויון מתקיים אם ורק אם $w = \pi(v)$.

■

העתקה צמודה (Adjoint Map)

הגדרה

יהיו V, W מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה \mathbb{F} . נסמן: $\dim V = n, \dim W = m$.

תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

אומרים ש- $T^*: W \rightarrow V$ היא צמודה ל- T , אם לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$, מתקיים שוויון:

$$(1): \boxed{\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle}$$

נוכח קיום ויחידות של T^*

1. נבחר ב- V, W בסיסים אורתונורמליים $B = \{v_1, \dots, v_n\}, B' = \{w_1, \dots, w_m\}$.
הבסיסים קיימים לפי גראם שמידט.

2. בהנחה ש- T^* קיימת, נוכיח יחידות.

שוויון (1) מתקיים לכל $v \in V, w \in W$, לכן נציב במקום v ווקטור $v_j, 1 \leq j \leq n$:
לכל $w \in W$:

$$\langle T(v_j), w \rangle = \langle v_j, T^*(w) \rangle$$

נוכיח ש- $T^*(w)$ מוגדר באופן חד משמעי.

נחפש את ההצגה של $T^*(w)$ יחסית לבסיס B :

$$T^*(w) = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_j \cdot v_j + \dots + \alpha_n \cdot v_n$$

נמצא את כל המקדמים $\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n$:

תזכורת

אם $v \in V$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס אורתונורמלי, ו- $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$.

אז: $\alpha_j = \langle v, v_j \rangle$.

ידוע ש- $\alpha_j = \langle T^*(w), v_j \rangle$ לכן: $\alpha_j = \langle T^*(w), v_j \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle v_j, T^*(w) \rangle$.

3. כדי להוכיח קיום של T^* , נגדיר, לכל $w \in W$, את $T^*(w)$:

$$T^*(w) = \overline{\langle T(v_1), w \rangle} \cdot v_1 + \cdots + \overline{\langle T(v_j), w \rangle} \cdot v_j + \cdots + \overline{\langle T(v_n), w \rangle} \cdot v_n$$

צריך לבדוק כי:

א. T^* מקיימת את שוויון (1).

ב. T^* העתקה לינארית.

א. שוויון (1) מתקיים ל- $v = v_1, \dots, v = v_j, \dots, v = v_n$ (לפי בנייה).

נבדוק עבור v כלשהו: אם $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$, אז:

$$\langle T(v), w \rangle = \langle T(\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n), w \rangle$$

$$\langle T(v), w \rangle = \langle \alpha_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(v_n), w \rangle$$

$$\langle T(v), w \rangle = \alpha_1 \cdot \langle T(v_1), w \rangle + \cdots + \alpha_n \cdot \langle T(v_n), w \rangle$$

$$\langle T(v), w \rangle = \alpha_1 \cdot \langle v_1, T^*(w) \rangle + \cdots + \alpha_n \cdot \langle v_n, T^*(w) \rangle$$

$$\langle T(v), w \rangle = \langle \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n, T^*(w) \rangle$$

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$$

ב. צריך לבדוק ש- $T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) = \beta_1 \cdot T^*(w_1) + \beta_2 \cdot T^*(w_2)$

$$\langle v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) \rangle = \langle T(v), \beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 \rangle$$

$$\langle v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) \rangle = \overline{\beta_1} \cdot \langle T(v), w_1 \rangle + \overline{\beta_2} \cdot \langle T(v), w_2 \rangle$$

$$\langle v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) \rangle = \overline{\beta_1} \cdot \langle v, T^*(w_1) \rangle + \overline{\beta_2} \cdot \langle v, T^*(w_2) \rangle$$

$$\langle v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) \rangle = \langle v, \overline{\beta_1} \cdot T^*(w_1) + \overline{\beta_2} \cdot T^*(w_2) \rangle$$

$$\langle v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) \rangle = \langle v, \beta_1 \cdot T^*(w_1) + \beta_2 \cdot T^*(w_2) \rangle$$

נתבונן בהפרש:

$$\langle v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) \rangle - \langle v, \beta_1 \cdot T^*(w_1) + \beta_2 \cdot T^*(w_2) \rangle = 0$$

$$\langle v, \overbrace{T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) - \beta_1 \cdot T^*(w_1) + \beta_2 \cdot T^*(w_2)}^{=u} \rangle = 0$$

$$\langle v, u \rangle = 0$$

השוויון נכון לכל $v \in V$, לכן בפרט עבור: $v = u$. לכן:

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

כלומר: $T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) = \beta_1 \cdot T^*(w_1) + \beta_2 \cdot T^*(w_2)$

■

משפט

תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה הצמודה ל- $T^*: W \rightarrow V$.

יהיו $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ בסיסים אורתונורמליים עבור V, W .

נסמן ב- A, A' את המטריצות המייצגות של T, T^* ביחס לבסיסים B, B' .

אזי: $A' = A^* (= \bar{A}^t)$.

תזכורת

אם ב- W קיים בסיס אורתונורמלי B' (מטריצת גראם היא מטריצת היחידה), אז:

$$\langle u, w \rangle = [u]_{B'}^t \cdot \overline{[w]_{B'}}$$

הוכחה

נשתמש בשוויון (1) עבור $v = v_j, w = w_i$. נחשב:

$$[T(v_j)]_{B'} = A \cdot [v_j]_B = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ R_j \\ \tilde{1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_j(A)$$

$$\langle T(v_j), w_i \rangle = [T(v_j)]_{B'}^t \cdot \overline{[w_i]_{B'}} = C_j(A)^t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ R_i \\ \tilde{1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = R_j(A^t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ R_i \\ \tilde{1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (A^t)_{ji}$$

$$\langle T(v_j), w_i \rangle = R_j(A^t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ R_i \\ \tilde{1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (A^t)_{ji}$$

באופן דומה:

$$[T^*(w_i)]_B = A' \cdot [w_i]_{B'} = A' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ R_i \\ \tilde{1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_i(A')$$

$$\langle v_j, T^*(w_i) \rangle = [v_j]_B^t \cdot \overline{C_i(A)}$$

$$\langle v_j, T^*(w_i) \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \dots & c_j & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{C_i(A)} = (\overline{A'})_{ji}$$

לכן:

$$A^t = \overline{A'}$$

$$\overline{A^t} = \overline{\overline{A'}}$$

$$\boxed{A' = A^*}$$

■