שאלה 1

(א) {<0,0>,<0,3>,<1,0>,<1,3>,<2,0>,<2,3>}

(ב){<0,0>,<0,1>,<0,2>,<3,0>,<3,1>,<3,2>}

(ג) {<1,{0}>,<1,1>,<1,2>,<{2},{0}>,<{2},1>,<{2},2>}

(ד) זו הקבוצה הריקה

(ה) P({1,2}) = { Ø, {1},{2},{1,2}} ולכן המכפלה היא:

{< Ø,1>,< Ø,2>,<{1},1>,< {1},2>,<{2},1>,<{2},2>,<{1,2},1>,<{1,2},2>}

(ו) $\{\langle a,b\rangle | a,b \in N\}$ (אין דרך יותר 'אלגנטית' לבטא את הקבוצה הזו)

שאלה 2

(א) נראה הכלה בכוון $\subseteq$:

יהי $\langle x,y\rangle \in A\times(B\cup C)$. אז $x\in A$ ו-$y\in B\cup C$. כלומר $y\in B$ או $y\in C$.

אם $y\in B$ אז $\langle x,y\rangle \in A\times B$ ואז $\langle x,y\rangle \in (A\times B)\cup(A\times C)$.

אם $y\in C$ אז $\langle x,y\rangle \in A\times C$ ושוב $\langle x,y\rangle \in (A\times B)\cup(A\times C)$.

נראה הכלה בכוון $\supseteq$:

יהי $\langle x,y\rangle \in (A\times B)\cup(A\times C)$.

אז $\langle x,y\rangle \in A\times B$ או $\langle x,y\rangle \in A\times C$.

אם $\langle x,y\rangle \in A\times B$ אז $x\in A$ ו- $y\in B$. לכן $y\in B\cup C$ ומתקיים $\langle x,y\rangle \in A\times(B\cup C)$.

אם $\langle x,y\rangle \in A\times C$ אז $x\in A$ ו- $y\in C$. לכן $y\in B\cup C$ ושוב נקבל $\langle x,y\rangle \in A\times(B\cup C)$.

(ב) נפריך ע"י דוגמה נגדית (העקרון: P(AxB) זו קבוצה של קבוצות, P(A)xP(B) זו קבוצה של זוגות סדורים).

נתבונן בקבוצות: A={1} ; B={2}.

אז P(AxB) ∋ Ø

אבל P(A) x P(B) ∉ Ø כי הקבוצה הריקה אינה זוג סדור של תת קבוצות של A ושל B.

שאלה 3

(א) נניח ש- $A \times B \subseteq C \times D$. נראה ש- $A \subseteq C$: יהי $x \in A$. B אינה ריקה, לכן קיים y כך ש- $y \in B$. אז הזוג הסדור $\langle x,y \rangle \in A \times B$. מההנחה נובע $\langle x,y \rangle \in C \times D$ ולכן $x \in C$.

באותו אופן (תוך שימוש בכך ש-A אינה ריקה) מוכיחים ש- $B \subseteq D$.

כעת נראה את הכיוון השני של טענת ה-'אם ורק אם'.

נניח ש- $A \subseteq C$ ו- $B \subseteq D$ ונראה ש-$A \times B \subseteq C \times D$ (ב).

יהי $\langle x,y \rangle \in A \times B$. כלומר $x \in A$ ו- $y \in B$. מההנחה נובע $x \in C$ ו-$y \in D$. לכן $\langle x,y \rangle \in C \times D$.

(ב) נראה דוגמה שבה $A \times B \subseteq C \times D$ אך $A \not\subset C$ (לשם כך לפחות אחת הקבוצות תצטרך להיות ריקה):

יהיו:

D={1} ; C= Ø ; B= Ø ; A={1}

אז AxB = CxD = Ø ולא מתקיים $A \subseteq C$.

נסכם את מסקנות סעיפים א' ו-ב' לתנאי הכרחי ומספיק לכך ש- AxB = BxA:

השיוויון מתקיים אם ורק אם A =Ø או B= Ø או A=B.

הוכחה: אם A =Ø או B= Ø אז AxB = BxA =Ø

ואם A וגם B אינן ריקות, אז מסעיף א' נובע ששיוויון מתקיים אם ורק אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$ ואז A=B.

שאלה 4

(א)

היחס אינו רפלקסיבי כי לדוגמה <1,1>$\notin$ S (שכן 1+1=2<10).

היחס סימטרי: אם x+y>10 אז גם y+x>10. לכן אם xSy אז גם ySx.

היחס אינו אנטיסימטרי, לדוגמה: 5S6 וגם 6S5 אך $5 \neq 6$

הבהרה: לא ניתן לטעון שהיחס סימטרי ולכן <u>אינו</u> אנטיסימטרי, כי יש יחס שהוא גם סימטרי וגם אנטי-סימטרי. כלומר התכונות הללו אינו סותרות זו את זו.

היחס אינו טרנזיטיבי. לדוגמה: 3S9 וגם 5S9 אך <3,5>$\notin$ S.

(ב)

היחס אינו רפלקסיבי כי לדוגמה $\langle 4,4\rangle \notin S$

היחס סימטרי: אם xy<10 אז גם yx<10. לכן אם xSy אז גם ySx.

היחס אינו אנטיסימטרי, לדוגמה: 1S2 וגם 2S1 אך $1 \neq 2$.

היחס אינו טרנזיטיבי. לדוגמה: 4S2 וגם 2S3 אך $\langle 4,3\rangle \notin S$.

(ג)

היחס רפלקסיבי: לכל n טבעי, $|n-n|=0$ ולכן nSn.

היחס סימטרי: אם $|x-y|<2$ אז גם $|y-x|<2$

היחס אינו אנטי-סימטרי: לדוגמה 1S2 וגם 2S1 אך $1 \neq 2$.

היחס אינו טרנזיטיבי: לדוגמה 1S2 וגם 2S3 אך $\langle 1,3\rangle \notin S$ (כי $|1-3|=2$ ולא קטן מ-2).

(ד)

היחס רפלקסיבי: לכל n טבעי, $n=n\cdot 1$ כלומר n מתחלק ב-n, ולכן nSn.

היחס אינו סימטרי. לדוגמה: 2S1 (כי 2 מתחלק ב-1) אך 1 לא מתחלק ב-2 (כלומר ע"י מחלק טבעי) ולכן $\langle 1,2\rangle \notin S$.

היחס אנטיסימטרי: אם nSm וגם mSn הרי שקיים k כך ש- $n=m\cdot k$

וקיים z כך ש- $m=n\cdot z$.

נחליף את m שבמשוואה הראשונה ב- $n\cdot z$:

$n=n\cdot z\cdot k$ ולכן $z\cdot k=1$. כיוון ש- z ו- k מספרים טבעיים, בהכרח z=k=1, ולכן n=m.

היחס טרנזיטיבי: נניח ש- nSm וגם mSk. אז קיים y כך ש- n=my . וקיים z כך ש- m=kz . נחליף את m מהמשוואה הראשונה ב-kz. נקבל: n=kzy. zy מספר טבעי ולכן n מתחלק ב-k. ולכן nSk.

שאלה 5

(א) היחס אינו רפלקסיבי (הזוג $\langle 3,3\rangle$ אינו ביחס) ולכן אינו יחס סדר חלקי.
(ב) היחס רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי ולכן הוא יחס סדר חלקי (זהו יחס הזהות והוא מקיים את כל התכונות הללו).
(ג) היחס רפלקסיבי (יש בו את כל הזוגות מהצורה $\langle x,x\rangle$), אנטיסימטרי (אם xRy ו-yRx אז זה לא ש-x=1 ו-y=2, ולכן x=y), וטרנזיטיבי (לא ניתן לשלול את הטרנזיטיביות על ידי שלושה איברים x,y,z כך ש- xRy, yRz אך ללא xRz).

לפיכך היחס הוא סדר חלקי.

(ד) היחס אינו טרנזיטיבי: 1R2 ו-2R3 אך 1R3 לא מתקיים. לכן אינו יחס סדר חלקי.
(ה) היחס אינו אנטי-סימטרי: 1R2 וגם 1R2 אך $1 \neq 2$.
(ו) היחס רפלקסיבי, אנטי-סימטרי (אין זוגות שסותרים זאת, דוגמת הזוגות שהיו בסעיף הקודם) וטרנזיטיבי (אין שלשות של איברים שסותרים זאת, אם xRy וגם yRz עבור x=1 ו- y=2 אז בהכרח z=2 ומתקיים xRz. וכך לכל שלשה אפשרית אחרת). לכן זהו יחס סדר חלקי.
(ז) היחס רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי (השלשה ה'מעניינת' היחידה היא x=3, y=2, z=1. מתקיים 3R2 וגם 1R2 וגם מתקיים 3R1. כל שלשה אחרת שמקיימת xRy וגם yRz, ממילא או ש-x=y או ש-y=z ולכן xRz גם כן מתקיים). ולכן זהו יחס סדר חלקי.

בכל סעיף נבדוק רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות וטרנזיטיביות.

(א)

i. רפלקסיביות: יהי $a \in \mathbb{N}$ ל־a יש את אותו מספר ספרות כמו לעצמו, כמובן, ולכן $(a,a) \in R$ והיחס רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $(a,b) \in R$. לכן, ל־a ול־b אותו מספר ספרות. לכן גם ל־b ול־a אותו מספר ספרות, ולכן $(b,a) \in R$ והיחס סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: $(1,2) \in R$ וגם $(2,1) \in R$ אך $2 \neq 1$ והיחס לא אנטי-סימטרי.

iv. טרנזיטיביות: יהיו $(a,b), (b,c) \in R$. לכן, ל־a ול־b אותו מספר ספרות, ול־b ול־c אותו מספר ספרות. לכן, ל־a ול־c אותו מספר ספרות, ולכן $(a,c) \in R$ והיחס טרנזיטיבי.

היחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן יחס שקילות.

בכל מחלקת שקילות יש את כל המספרים עם אותו מספר ספרות: קבוצת המספרים החד-ספרתיים, קבוצת המספרים הדו-ספרתיים וכן הלאה.

(ב)

i. רפלקסיביות: עבור $1 \in \mathbb{N}$, $1+1$ לא מתחלק ב־3 ולכן $(1,1) \notin R$ והיחס אינו רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $(a,b) \in R$. לכן $a+b$ מתחלק ב־3. לכן גם $b+a$ מתחלק ב־3. לכן $(b,a) \in R$ והיחס סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: $(1,2) \in R$ וגם $(2,1) \in R$ אך $2 \neq 1$ ולכן היחס אינו אנטי-סימטרי.

iv. טרנזיטיביות: $(1,2), (2,1) \in R$ אך $(1,1) \notin R$ ולכן היחס אינו טרנזיטיבי.

היחס אינו יחס שקילות.

(ג)

i. רפלקסיביות: יהי $a \in \mathbb{N}$. כל מספר מחלק את עצמו ולכן $(a,a) \in R$ והיחס רפלקסיבי.

ii. סימטריות: $(1,2) \in R$ (כי 1 מחלק את 2) אך $(2,1) \notin R$ (כי 2 לא מחלק את 1) ולכן היחס אינו סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: יהיו $(a,b), (b,a) \in R$. מצד אחד a מחלק את b ולכן $a \leq b$ ומצד שני b מחלק את a ולכן $b \leq a$, ומכאן נקבל $a = b$ ולכן היחס אנטי-סימטרי.

iv. טרנזיטיביות: יהיו $(a,b), (b,c) \in R$. a מחלק את b ולכן קיים m טבעי עבורו: $b = am$. b מחלק את c ולכן קיים n טבעי עבורו: $c = bn$.

אם כן, $c = a \cdot mn$, כלומר c הוא כפולה של a ולכן a מחלק את c. לכן

$(a,c)\in R$ והיחס טרנזיטיבי.

היחס אינו יחס שקילות.

(ד)
i. רפלקסיביות: יהי $(X,Y)\in A$. מתקיים $X\cup Y=Y\cup X$ ולכן $((X,Y),(X,Y))\in R$ והיחס רפלקסיבי.
ii. סימטריות: יהי $((X,Y),(Z,W))\in R$. לכן $X\cup W=Y\cup Z$. לכן גם $Z\cup Y=W\cup X$, ולכן $((Z,W),(X,Y))\in R$ והיחס סימטרי.
iii. אנטי-סימטריות: $((\{1\},\{2\}),(\{1,2\},\{2\}))\in R$ וגם $((\{1,2\},\{2\}),(\{1\},\{2\}))\in R$ אך $(\{1,2\},\{2\})\neq(\{1\},\{2\})$ והיחס אינו אנטי-סימטרי.
iv. טרנזיטיביות: $((\{1,2\},\{2\}),(\{1\},\{1\})),((\{1\},\{1\}),(\{3\},\{3\}))\in R$, אך $((\{1,2\},\{2\}),(\{3\},\{3\}))\notin R$ והיחס אינו טרנזיטיבי.

היחס אינו יחס שקילות.

(ה)
i. רפלקסיביות: יהי $a\in A$. $aa=a^2$ הוא ריבוע של מספר שלם (של a) ולכן $(a,a)\in R$ והיחס רפלקסיבי.
ii. סימטריות: יהי $(a,b)\in R$. לכן ab ריבוע של מספר שלם. לכן גם ba ריבוע של מספר שלם ולכן $(b,a)\in R$ והיחס סימטרי.
iii. אנטי-סימטריות: $(2,8),(8,2)\in R$ אך $2\neq 8$ ולכן היחס אינו אנטי-סימטרי.
iv. טרנזיטיביות: יהיו $(a,b),(b,c)\in R$. לכן ab,bc הם ריבועים של מספרים שלמים. נרשום: $ab=n^2,bc=m^2$. נכפיל את המשוואות זו בזו ונקבל:

$$ab^2c=m^2n^2\Longrightarrow ac=\left(\frac{mn}{b}\right)^2$$

$\frac{mn}{b}$ הוא מספר שלם (כי m הוא כפולה של b) ולכן גם ac הוא ריבוע של מספר שלם. לכן $(a,c)\in R$ והיחס טרנזיטיבי.

היחס הוא יחס שקילות.

מחלקות השקילות הן: $[n]_R=\left\{a|\exists c\in A|an=c^2\right\}$. כלומר, a נמצא במחלקת השקילות אם $a=\frac{c^2}{n}$ עבור c טבעי כלשהו. אם כן, אפשר לומר שבמחלקת השקילות של n נמצאים כל המספרים הריבועיים חלקי n, למשל: $[1]_R=\{1,4,9,16,\dots\},[2]_R=\left\{\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\dots\right\}$ ובאופן כללי $[n]_R=\left\{\frac{1}{n},\frac{4}{n},\frac{9}{n},\frac{16}{n},\dots\right\}$.

(ו)
i. רפלקסיביות: תהי $X\in A$. $X\Delta X=\emptyset$. בפרט $1\notin X\Delta X$ ולכן $(X,X)\in R$ והיחס רפלקסיבי.
ii. סימטריות: יהי $(X,Y)\in R$. לכן $1\notin X\Delta Y$. מתקיים $X\Delta Y=Y\Delta X$ ולכן גם $1\notin Y\Delta X$. לכן $(Y,X)\in R$ והיחס סימטרי.
iii. אנטי-סימטריות: $(\{2\},\{6\}),(\{6\},\{2\})\in R$ אך $\{6\}\neq\{2\}$ ולכן היחס אינו אנטי-סימטרי.
iv. טרנזיטיביות: יהיו $(X,Y),(Y,Z)\in R$. לכן $1\notin X\Delta Y,Y\Delta Z$. מתקיים: $X\Delta Z\subseteq(X\Delta Y)\cup(Y\Delta Z)$ ולכן גם $1\notin X\Delta Z$. לכן $(X,Z)\in R$ והיחס טרנזיטיבי.

היחס הוא יחס שקילות.

מהן מחלקות השקילות? אם $Y \in [X]_R$, $1 \notin X\Delta Y$.
מהגדרת הפרש סימטרי, אם $1 \in X$ אז $1 \in Y$ ואם $1 \notin X$ אז $1 \notin Y$.
כלומר, יש שתי מחלקות שקילות: הקבוצות המכילות את $\{1\}$ ואלו שלא.
אפשר להציג אותן כך:

$$[\{1\}]_R = \{Y \in A | 1 \in Y\}, [\emptyset]_R = \{Y \in A | 1 \notin A\}$$

(ז) i. רפלקסיביות: תהי $X \in A$. $X\Delta X = \emptyset$, ולכן $X\Delta X$ סופית, $(X,X) \in R$ והיחס רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $(X,Y) \in R$. לכן $X\Delta Y$ סופית. . מתקיים $X\Delta Y = Y\Delta X$ ולכן גם $Y\Delta X$ סופית. לכן $(Y,X) \in R$ והיחס סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: $R \in (\{2\},\{6\}), (\{6\},\{2\})$ אך $\{6\} \neq \{2\}$ ולכן היחס אינו אנטי-סימטרי.

iv. טרנזיטיביות: יהיו $(X,Y),(Y,Z) \in R$. לכן $X\Delta Y, Y\Delta Z$ סופיות. מתקיים: $X\Delta Z \subseteq (X\Delta Y) \cup (Y\Delta Z)$ ולכן גם $X\Delta Z$ סופית. לכן $(X,Z) \in R$ והיחס טרנזיטיבי.

היחס הוא יחס שקילות.

מהן מחלקות השקילות? אם $Y \in [X]_R$, $X\Delta Y$ סופית. מתקיים: $X\Delta Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$. כלומר, מספר האיברים שנמצאים ב$X-$ אך לא ב$Y-$ הוא סופי, וכך גם מספר האיברים שנמצאים ב$Y-$ אך לא ב$X-$. אם כן, אפשר לומר שבמחלקת השקילות של X נמצאות כל הקבוצות ש"שונות מ$X-$" במספר סופי של איברים.

(ח) i. רפלקסיביות: $\{1\} \in A$ אך $\{1\}\Delta\{1\}$ לא אינסופית, ולכן $(\{1\},\{1\}) \notin R$ והיחס אינו רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $(X,Y) \in R$. לכן $X\Delta Y$ אינסופית. . מתקיים $X\Delta Y = Y\Delta X$ ולכן גם $Y\Delta X$ אינסופית. לכן $(Y,X) \in R$ והיחס סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: $R \in (2\mathbb{N},\mathbb{N}), (\mathbb{N},2\mathbb{N})$ אך $\mathbb{N} \neq 2\mathbb{N}$ ולכן היחס אינו אנטי-סימטרי (הקבוצה $2\mathbb{N}$ היא קבוצת כל המספרים הזוגיים).

iv. טרניזטיביות: $R \in (\emptyset,\mathbb{N}), (\mathbb{N},\emptyset)$ אך $(\mathbb{N},\mathbb{N}) \notin R$ ולכן היחס אינו טרנזיטיבי.

היחס אינו יחס שקילות.