חדו"א להנדסה־ תרגול 14
טורים הנדסיים:

הגדרות:

- טור חזקות סביב נקודה x_0 הינו טור פונקציות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.
- נשים לב כי הטור מתחיל מ־ $n=0$, שם מקבלים את a_0 בלבד. כמו כן, אם נציב $x=x_0$ אז נקבל־

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0$$

- משפט: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות, אז קיים $0 \le R \le \infty$ כך ש־

(א) הטור מתכנס בהחלט לכל $|x-x_0| < R$ (שקול לומר לכל $x \in (x_0-R, x_0+R)$).

(ב) הטור מתכנס במ"ש על קטעים מהצורה $[x_0-a, x_0+a]$ לכל $a<R$.

(ג) הטור מבדר לכל $|x_0-x| > R$ (שקול לומר לכל $x \in (x_0+R, \infty)$ או $x \in (-\infty, x_0-R)$).

$\star$ המשפט לא מטפל בנקודות הקצה $x = x_0 \pm R$.

תרגיל 1: לאלו x־ים הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-4)^n}{n}$ מתכנס?
ראשית עלינו לסדר את הטור על מנת שהוא יראה מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-4)^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot (x-2)^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot (x-2)^n$$

כלומר $a_n = \frac{2^n}{n}$ ו־ $x_0 = 2$. נוכל להשתמש במבחנים שלמדנו על טורי מספרים.
נבדוק התכנסות בהחלט. נשתמש במבחן השורש של קושי (כי יש חזקה n־ית):

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n} \cdot |x-2|^n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2|x-2|}{\sqrt[n]{n}} = 2|x-2| < 1 \iff |x-2| < \frac{1}{2}$$

כלומר לכל $x \in \left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ הטור מתכנס בהחלט. מה לגבי הקצוות?
אם $x = 2\frac{1}{2}$ נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ שהוא מתבדר, ואם $x = 1\frac{1}{2}$ אז נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ שהוא מתכנס בתנאי לפי מבחן לייבניץ.
סך הכל במקרה זה $R = \frac{1}{2}$.

מבחני התכנסות לטורי חזקות

1. מבחן קושי: עבור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ נסמן $c = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. אז:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{c} & 0 < c < \infty \\ 0 & c = \infty \\ \infty & c = 0 \end{cases}$$

2. מבחן דלאמבר: עבור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ נסמן $d=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. אז $d=R$.

לדוגמא, בתרגיל 1:
מבחן קושי:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n}}=\limsup_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n}}=2\Rightarrow R=\frac{1}{2}$$

מבחן דלאמבר:

$$R=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}}\right|=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$$

תרגיל 2: מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n+7^n}{2n}x^n$?
יש הרבה חזקות ולכן נשתמש במבחן קושי:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+7^n}{2n}}$$

לשם כך נרצה להשתמש באריתמטיקה של גבולות.

$$(1)\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n}=1$$

בנוסף

$$7^n\le 5^n+7^n\le 2\cdot 7^n$$

ממבחן הסנדוויץ':

$$7=\sqrt[n]{7^n}\le\sqrt[n]{5^n+7^n}\le\sqrt[n]{2\cdot 7^n}\to 7$$

$$(2)\quad\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+7^n}=7$$

מ־ $(1),(2)$ ביחד עם אריתמטיקה של גבולות, נובע ש־

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+7^n}{2n}}=7$$

כלומר ממבחן קושי נקבל ש־ $R=\frac{1}{7}$.

תרגיל 3: מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$?
יש $n!$, לכן נשתמש במבחן דלאמבר:

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=0$$

ומכאן ש־ $R=0$.

תרגיל 4: מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}nx^{2n}$?
ראשית עלינו להבין מה הם המקדמים שלנו

$$a_n=\begin{cases}0 & n\in\mathbb{N}_{odd}\\ \frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\end{cases}$$

נשתמש במבחן קושי־

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$$

נשים לב שכאן הגבול לא קיים, ולכן אכן חשוב שנשתמש ב$\limsup$ ולא יכולנו להשתמש ב־ $\lim$.
קיבלנו שרדיוס ההתכנסות הוא $R=1$.

סכום של טורים

אם $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ ו־ $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ שני טורי חזקות עם רדיוס התכנסות R_a,R_b אזי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$ הוא המינימום בין השניים, נסמנו ב־ R. במקרה זה עבור $|x-x_0|<R$ נקבל ש־

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$$

<u>פיתוח לטורים</u>

אנו יודעים שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ הינו טור מתכנס עבור $|x|<1$. כמו כן, אנו יודעים שעבור $x=\pm1$ הטור אנו מתכנס. לכל $|x|<1$ יתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

תרגיל 5: תארו את הפונקציה $\frac{1}{x+1}$ כטור חזקות.
נסמן $x=-t$ אז־

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$$

תרגיל 6: תארו את הפונקציה $\frac{x}{x+1}$ כטור חזקות.

$$\frac{x}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=1-\frac{1}{x+1}=1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n=$$

$$=(-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n$$

תרגיל 7: פתחו סביב 0 את הטור של הפונקציה $\frac{1}{x+a}$ כטור חזקות.

$$\frac{1}{x+a}=\frac{1}{a\cdot(\frac{x}{a}+1)}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{a}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x}{a})}=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{a}\right)^n=\frac{1}{a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^n}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\cdot x^n$$

ורדיוס ההתכנסות יהיה כאשר $\left|\frac{x}{a}\right|<1$ כלומר $|x|<a$.

תרגיל 8: פתחו סביב 0 את הטור של הפונקציה $\frac{7}{(x+3)(x-4)}$ כטור חזקות.
ראשית נהפוך את המכפלה לסכום של שני שברים ממעלה 1: איך???
שלב 1: נרשום

$$\frac{7}{(x+3)(x-4)}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-4}$$

שלב 2: נעשה מכנה משותף

$$\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-4}=\frac{a(x-4)+b(x+3)}{(x+3)(x-4)}=\frac{x(a+b)+(3b-4a)}{(x+3)(x-4)}$$

שלב 3: נחלץ את a ואת b

$$\frac{7}{(x+3)(x-4)}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-4}=\frac{x(a+b)+(3b-4a)}{(x+3)(x-4)} \iff (a+b)=0 \text{ AND } (3b-4a)=7$$

שכן אז במונה, המקדמים החופשיים זהים והמקדמים של x זהים.
דרך אחרת־ נציב פעם אחת $x=0$ ופעם שניה $x=1$ ונחלץ. נסיק כי $a=(-b)=(-1)$, כלומר

$$\frac{7}{(x+3)(x-4)}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+3}$$

עתה נפתח כל טור בנפרד:

$$(1)\ \frac{1}{x-4}=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}}=\left(-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{4^{n+1}}x^n$$

וכן רדיוס ההתכנסות (ממבחן קושי) יהיה $R_1=4$.

$$(2)\ \frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x}{3})}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\cdot x^n$$

וכן רדיוס ההתכנסות (ממבחן קושי) יהיה $R_2=3$.
סך הכל מ־ $(1),(2)$ נקבל מאריתמטיקה של טורים מתכנסים כי־

$$\frac{7}{(x+3)(x-4)}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{4^{n+1}}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\cdot x^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)\cdot x^n$$

ורדיוס ההתכנסות יהיו $R=3$.

טורי חזקות שחשוב לזכור

1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ , \ R = 1$
2. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ , \ R = \infty$
3. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \ R = \infty$
4. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ , \ R = \infty$

משפט: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור מתכנס בהחלט בתחום $D = (x_0 - R, x_0 + R)$,

1. הפונקציה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ הינה פונקציה רציפה, גזירה ואנטגרבילית.
2. הנגזרת, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x-x_0)^{n-1}$, טור חזקות עם אותו רדיוס התכנסות.
3. האנטגרל $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$

תרגיל 9: פתחו את הטור של הפונקציה $f(x) = \ln(x+1)$ כטור חזקות סביב 0.
נזכור כי־ $f'(x) = \frac{1}{x+1}$. כמו כן, מתרגיל 5 אנו יודעים כי $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ מהמשפט נסיק כי:

$$\ln(x+1) = \int \frac{1}{x+1} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

הערה: נשים לב שאם ניתן לפתח את f לטור חזקות סביב x_0 אז בהכרח $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. כלומר אם יבקשו את המקדם ה־k של טור חזקות של פונקציה מסוימת, נגזור אותה k פעמים, ונציב בנוסחא.

תרגיל 10: פתחו לטור מספרים את $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.
אנו יודעים כי $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, ולכן נקבל־

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2n+1} \Bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

תרגיל 11: נתבונן בסדרה $a_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n}$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.
להוכיח שהסדרה מתכנסת, זה כמו לומר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ הוא טור מתכנס.
הטור הוא טור חיובי, ולכן ניתן להוכיח שהוא מתכנס עם מבחן השורש־

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$$

כלומר הטור מתכנס.
איך נחשב את גבולה? נשתמש בפונקציות. נגדיר את טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$, אכן רדיוס ההתכנסות שלו הוא 1, $\frac{1}{2} \Leftarrow$ בתוך התחום שלו, ולכן נוכל להשתמש בו. נשים לב כי מהמשפט־

$$(1)\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$(2)\ \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

$$(3)\ x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n}$$

$$(4)\ x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n}$$

נציב $x = \frac{1}{2}$ ונקבל כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \left.\frac{x}{(1-x)^2}\right|_{x=\frac{1}{2}} = 2$$

טענה 1־ מבחן לייבניץ לטורים מתחלפים:

תהי $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת ל־0 של מספרים אי־שליליים. נוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ הוא טור מתכנס.

הוכחה: נשים לב כי הסדרה $\{(-1)\cdot S_{2n}\}$ הינה סדרה מונוטונית עולה, שכן־

$$(-1)\cdot S_{2(n+1)} - (-1)\cdot S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k a_k = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$$

מצד שני, היא חסומה מלמעלה על ידי a_1 שכן־

$$(-1)\cdot S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

שכן כל אחד מההפרשים הללו הוא חיובי, וכאשר מחסירים משהו חיובי, מקבלים משהו קטן יותר.
סך הכל קיבלנו סדרה מונוטונית עולה וחסומה ולכן מתכנסת.
נסיק כי $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = L$ שכן אנו יודעים שכפל בקבוע (כמו (-1)) לא משנה את התכנסות הסדרה.

נראה ש$S_n \to L$ מספיק לשם כך להראות ש$S_{2n+1} \to L$ וממשפט שראינו בתרגיל נקבל שהסדרה מתכנסת ל־L. ואולם

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L + 0 = L$$

קיבלנו שהטור מתכנס לפי ההגדרה.

טענה 2:

תהי $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת ל־0 של מספרים אי־שליליים. נוכיח כי לכל n מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \leq |a_n|$$

טענת עזר: לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+n}a_k\geq 0$$

הוכחה: נשים לב כי־

$$\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+n}a_k=a_n-a_{n+1}+a_{n+2}-a_{n+3}+\dots=(a_n-a_{n+1})+(a_{n+2}-a_{n+3})+\dots$$

עתה לכל k מתקיים $a_k\geq a_{k+1}$ ולכן $(a_k-a_{k+1})\geq 0$, כלומר הטור שרשום למעלה הוא סכום של דברים חיוביים, ובפרט מתקיים

$$\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+n}a_k=(a_n-a_{n+1})+(a_{n+2}-a_{n+3})+\dots\geq 0$$

הוכחת הטענה תוך שימוש בטענת העזר:

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k\right|=|(-1)^n|\cdot\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k\right|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{n+k}a_k\right|$$

מטענת העזר $\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{n+k}a_k\right|=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{n+k}a_k\geq 0$. אז־

$$0\leq\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{n+k}a_k=\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{n+k}a_k\right|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k\right|$$

עתה־

$$0\leq\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{n+k}a_k=a_n+\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+k}a_k$$

נעביר את $\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+k}a_k$ לאגף השני על ידי חיסור־

$$\Rightarrow(-1)\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+k}a_k=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+1+k}a_k\leq a_n$$

ואולם משימוש נוסף בטענת העזר אנו יודעים ש־

$$0\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+1+k}a_k=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+1+k}a_k\right|$$

$$\Rightarrow\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+1+k}a_k\right|=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+1+k}a_k\leq a_n=|a_n|$$