

## אלגברה לינארית למורים - פתרון תרגיל 8

### שאלה 1

מצאו בסיס למרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### פתרון

תחילה נמצא את מרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 + R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4 - 2R_2 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש שתי משתנים חופשיים ולכן נסמן:

$$x_2 = t, x_4 = s$$

כעת, נייצג את שאר המשתנים באמצעות משתנים אילו.

$$x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_4 \Rightarrow x_3 = -s$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \Rightarrow x_1 = s - t$$

ולכן נקבל שאוסף הפתרונות של המערכת הוא מהצורה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} s-t \\ t \\ -s \\ s \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

והרי הוקטורים שפורשים את מרחב הפתרונות של המערכת בת"ל ופורשים ולכן מהוות בסיס למרחב הפתרונות של המערכת.

## שאלה 2

מצאו בסיס למרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## פתרון

תחילה נמצא את מרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2+2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_4-3R_1 \rightarrow R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_3 \\ \frac{1}{4}R_4 \rightarrow R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_4 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_3 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1+3R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש משתנה אחד חופשי נסמן:  $x_4 = t$ 

נקבל:

$$x_3 = 0, x_2 = 0$$

$$x_1 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_4 \Rightarrow x_1 = t$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן נקבל שאוסף הפתרונות של המערכת הוא מהצורה:

והרי הוקטורים שפורשים את מרחב הפתרונות של המערכת בת"ל ופורשים ולכן מהוות בסיס למרחב הפתרונות של המערכת.

### שאלה 3

מצאו את המימד של המרחב הנפרש ע"י הוקטורים הבאים:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

#### פתרון

מכיוון שוקטורים אילו פורשים את המרחב. אזי נשאר לנו רק להפוך אותם לקבוצה בת"ל. ולכן נכנס למטריצה והשורות שלא מתאפסות הם יהיו הוקטורים הבת"ל שיהוו בסיס.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2-3R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3-5R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4-7R_1 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3+4R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4+5R_2 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל כי הבסיס למרחב הנפרש ע"י וקטורים אילו הוא:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  ולכן המימד הוא 2.

### שאלה 4

מצאו את המימד של המרחב הנפרש ע"י הוקטורים הבאים:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### פתרון

מכיוון שוקטורים אילו פורשים את המרחב. אזי נשאר לנו רק להפוך אותם לקבוצה בת"ל. ולכן נכנס למטריצה והשורות שלא מתאפסות הם יהיו הוקטורים הבת"ל שיהוו בסיס.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_4-R_1 \rightarrow R_4 \\ R_6-R_1 \rightarrow R_6 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_4+R_2 \rightarrow R_4 \\ R_5-R_2 \rightarrow R_5 \\ R_6+R_2 \rightarrow R_6 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_4-R_3 \rightarrow R_4 \\ R_6-2R_3 \rightarrow R_6 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל כי הבסיס למרחב הנפרש ע"י וקטורים אילו הוא:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

ולכן המימד הוא 4.

## שאלה 5

קבעו האם הקבוצות הבאות יכולות להוות בסיס למרחב הנתון.

$$\text{א. מרחב: } R^3 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ב. מרחב: } R^2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

## פתרון

א. המימד של  $R^3$  הוא 3 ויש רק שני וקטורים ולכן הם לא יכולים להיות בסיס

ב. המימד של  $R^2$  הוא 2 ויש ארבע וקטורים ולכן הם לא יכולים להיות בסיס