בוחן בדידה 1 למהנדסים, 83-116, תשעז

ו' טבת 4/1/2017

מתרגלים: אריאל ויצמן, אמונה ליפסקר.

- ענו על כל השאלות.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה ועשרים דקות.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי - מומלץ להתחיל עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.
- מבנה הבוחן וניקוד: בבוחן 3 שאלות $\times$ 36 נקודות לכל שאלה = 108 נקודות בסה"כ.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

שאלה	ציון
1	
2	
3	
סה"כ	

בהצלחה!

1. לכל $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ נגדיר את הקבוצה $A_n = \{k \in \mathbb{N} | 2 \le k \le 3n-2\}$, ותהי $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$.

א. חשבו את $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} B_n$. הוכיחו את תשובתכם (כלומר, הוכיחו את השיוויון בין האיחוד הנתון לבין תשובתכם). (18 נקודות)

ב. נסמן $D_n = \mathbb{N} \setminus B_n$. חשבו את $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} D_n$. הוכיחו את תשובתכם (כלומר, הוכיחו את השיוויון בין החיתוך הנתון לבין תשובתכם). (18 נקודות)

<u>פתרון:</u>

א.

נראה כי $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} B_n = \{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\}$.

הוכחה: בשלב ראשון נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $B_n = \{x \in \mathbb{N} | 3n-1 \le x \le 3n+1\}$.

$x \in B_n = A_{n+1} \setminus A_n \iff x \in A_{n+1} \land X \notin A_n \iff (2 \le x \le 3n+1) \land \neg(2 \le x \le 3n-2) \iff (3n-1 \le x \le 3n+1)$.

כלומר $x \in \{x \in \mathbb{N} | 3n-1 \le x \le 3n+1\} \iff x \in B_n$ ולכן מתקיים שיוויון.

כעת, נוכיח כי $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \{x \in \mathbb{N} | 3n-1 \le x \le 3n+1\} = \{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\}$ ע"י הכלה דו כיוונית:

יהי $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\}$ נוכיח כי הוא באיחוד:

x הוא מספר טבעי גדול מ2, לכן יש 3 מקרים: **אם** x **מתחלק ב 3,** אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x = 3n$ ולכן $3n-1 \le x \le 3n+1$ כלומר $x \in B_n$ ולכן x באיחוד.

אם $x-1$ **מתחלק ב 3,** כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x-1 = 3n$ כלומר $x = 3n+1$ ולכן $3n-1 \le x \le 3n+1$ כלומר $x \in B_n$ ולכן x באיחוד.

אם $x+1$ **מתחלק ב 3,** כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x+1 = 3n$ כלומר $x = 3n-1$ ולכן $3n-1 \le x \le 3n+1$ כלומר $x \in B_n$ ולכן x באיחוד.

ובכל אופן מצאנו כי $x \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} B_n$.

נניח כעת כי $x \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \{x \in \mathbb{N} | 3n-1 \le x \le 3n+1\}$ ונוכיח כי $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\}$.

$x \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \{x \in \mathbb{N} | 3n-1 \le x \le 3n+1\} \implies \exists n \in \mathbb{N} : 3n-1 \le x \le 3n+1$.

כיוון ש$n \ge 1$ נקבל $3n-1 \ge 2$ ולכן $x \ge 2$ כלומר $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\}$. וסיימנו.

ב.

ניקח בתור הקבוצה האוניברסלית שלנו את $\mathbb{N}$. אזי :

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} D_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} \mathbb{N} \setminus B_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} B_n^c = \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} B_n\right)^c = (\{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\})^c = \{1\}.$$

2. א. יהי $P(x,y)$ פרדיקט מעל הממשיים (כלומר, $x,y \in \mathbb{R}$). הוכיחו או הפריכו:

i) $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow \exists y.\forall x.P(x,y)$. (12 נקודות).

ii) $\exists y.\forall x.P(x,y) \Rightarrow \forall x.\exists y.P(x,y)$. (12 נקודות)

ב. כתבו צורת DNF וצורת CNF של הפסוק: $p \leftrightarrow q$. (12 נקודות)

<u>פתרון:</u>

א.

i) הפרכה: ניקח את הפרדיקט $P(x,y) = x > y$, אכן לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש $x > y$, אבל לא קיים $y \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים ש $x > y$.

ii) הוכחה: נניח שמתקיים $\exists y.\forall x.P(x,y)$ ונראה ש־ $\forall x.\exists y.P(x,y)$. נתון שקיים $y \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים ש $P(x,y)$, אז נסמן את ה־y הזה ב־y_0. כלומר קיבלנו מהנתון שלכל x מתקיים $P(x,y_0)$. כעת, ברור שלכל $x \in \mathbb{R}$ יש $y \in \mathbb{R}$ עבורו $P(x,y)$, כי פשוט נבחר את y_0, שלפי הנתון הוא מתאים לכולם, כלומר מתקיים $P(x,y_0)$!

ב.

נבנה טבלת אמת של הפסוק:

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

כעת, בשביל צורת DNF ניקח את השורות בעלות ערך אמת T, שהן שורות 1,4 ולפי האלגוריתם נקבל את הצורה:

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

ובשביל צורת CNF ניקח את השורות בעלות ערך אמת F, שהן שורות 2,3 ולפי האלגוריתם נקבל את הצורה:

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$$

3. תהיינה A, B קבוצות. הוכיחו:

א. $P(A) \subseteq P(B) \iff A \subseteq B$. (12 נקודות)

ב. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$. (12 נקודות)

ג. תהי U הקבוצה האוניברסלית לדיוננו, הוכיחו כי: $A \cap [(B \cup A^c) \cap B^c] = \phi$. (12 נקודות)

<u>פתרון:</u>

א.

$\Leftarrow$: נניח $P(A) \subseteq P(B)$, ויהי $a \in A$, אזי $\{a\} \in P(A)$ וכיון ש־ $P(A) \subseteq P(B)$ נובע ש־ $\{a\} \in P(B)$, ולכן $a \in B$. דרך נוספת: $A \in P(A)$ לפי הגדרה, וכיון ש־ $P(A) \subseteq P(B)$ נובע ש־ $A \in P(B)$, ולכן, לפי הגדרה $A \subseteq B$.

$\Rightarrow$: נניח $A \subseteq B$, ויהי $X \in P(A)$, לכן $X \subseteq A$, וכיון ש־ $A \subseteq B$ נובע ש־ $X \subseteq B$, ולכן $X \in P(B)$

ב.

$X \in P(A) \cap P(B)$ אמ"ם $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ אמ"ם $X \subseteq A \cap B$ אמ"ם $X \in P(A \cap B)$.

ג.

$A \cap [(B \cup A^c) \cap B^c] = [A \cap (B \cup A^c)] \cap B^c = [(A \cap B) \cup (A \cap A^c)] \cap B^c = [(A \cap B) \cup \phi] \cap B^c = (A \cap B) \cap B^c =$
$A \cap (B \cap B^c) = A \cap \phi = \phi$.

הסבר המעברים: השיוויון הראשון נובע מחוק האסוציאטיביות. השיוויון השני זה חוק הפילוג. השיוויון השלישי נובע מכך שחיתוך של קבוצה עם המשלים שלה זו הקבוצה הריקה. השיוויון הרביעי אומר שאיחוד עם הקבוצה הריקה לא משפיע. השיוויון החמישי זה שוב חוק האסוציאטיביות, השיוויון השישי כשלישי והשיוויון השביעי נובע מכך שחיתוך עם הקבוצה הריקה הוא ריק.