**אי שווין המשולש**

לכל $v,w\in V$ מתקיים: $\left|\left|v+w\right|\right|\leq \left|\left|v\right|\right|+\left|\left|w\right|\right|$.

בנוסף, מתקיים שוויון אם ורק אם $w=α⋅v$, כאשר $α\in R\_{\geq 0}$ (תלות לינארית חיובית).

**הוכחה**

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2}= <v+w,v+w> = <v,v> + <v,w> + <w,v> + <w,w>$$

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2}= <\left|\left|v\right|\right|^{2}+ <v,w> +\overbar{<v,w>} +\left|\left|w\right|\right|^{2}$$

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2}=\left|\left|v\right|\right|^{2}+2⋅Re\left(<v,w>\right)+\left|\left|w\right|\right|^{2}$$

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2}\leq \left|\left|v\right|\right|^{2}+2⋅\left|<v,w>\right|+\left|\left|w\right|\right|^{2}$$

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2} \overset{קש"ב}{\leq } \left|\left|v\right|\right|^{2}+2⋅\left|\left|v\right|\right|⋅\left|\left|w\right|\right|+\left|\left|w\right|\right|^{2}$$

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2}\leq \left(\left|\left|v\right|\right|+\left|\left|w\right|\right|\right)^{2} $$

$$\left|\left|v+w\right|\right|\leq \left|\left|v\right|\right|⋅\left|\left|w\right|\right|$$

$\left|\left|v+w\right|\right|=\left|\left|v\right|\right|⋅\left|\left|w\right|\right|$ אם ורק אם $\left\{v,w\right\}$ תלויים לינארית, ז"א: $w=α⋅v$. במקרה זה:

$$|<v,w>|=|<v,α⋅v>|=\left|\overbar{α}⋅<v,v>\right|=\left|α\right|⋅\left|\left|v\right|\right|^{2} $$

$$Re\left(<v,w>\right)=Re\left(<v,α⋅v>\right)=Re\left(\overbar{α}⋅<v,v>\right)=Re\left(\overbar{α}⋅\left|\left|v\right|\right|^{2}\right)$$

$$Re\left(\overbar{α}⋅\left|\left|v\right|\right|^{2}\right)=|α|⋅\left|\left|v\right|\right|^{2}⇔\left|α\right|=Re\left(\overbar{α}\right)=Re(α)⟺α\in R\_{\geq 0}$$

$$∎$$

**זהות פולרית**

*ידוע ש -* $\left|\left|\right|\right|$*, מושרית ממ"פ* $<,>$*. האם ניתן לשחזר* $<,>$ *החל מ -* $\left|\left|\right|\right|$*?*

*נתון* $\left|\left|v\right|\right|$ *לכל* $v\in V$*. צריך לחשב* $<v,w>$ *לכל* $v,w\in V$*.*

*ניקח* $v,w\in V$*.*

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2}= <v+w,v+w> = <v,v> + <v,w> + <w,v> + <w,w>$$

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2}= <\left|\left|v\right|\right|^{2}+ <v,w> +\overbar{<v,w>} +\left|\left|w\right|\right|^{2}$$

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2}=\left|\left|v\right|\right|^{2}+2⋅Re\left(<v,w>\right)+\left|\left|w\right|\right|^{2}$$

$$Re\left(<v,w>\right)=\frac{1}{2}⋅\left(\left|\left|v+w\right|\right|^{2}-\left|\left|v\right|\right|^{2}-\left|\left|w\right|\right|^{2}\right)$$

לכן, אם $F=R$, נקבל את הזהות הבאה:

**זהות פולרית ממשית**

$<v,w> =\frac{1}{2}⋅\left(\left|\left|v+w\right|\right|^{2}-\left|\left|v\right|\right|^{2}-\left|\left|w\right|\right|^{2}\right) $.

**למה**

לכל $v,w\in V$ מתקיים: $Re\left(<v,w>\right)=Im\left(<v,-iw>\right)$.

**הוכחה**

$$<v,-i⋅w> =\overbar{-i}⋅<v,w> =i⋅<v,w>$$

נסמן $<v,w> =x+i⋅y$.

אזי:

$$<v,-i⋅w> =i⋅\left(x+i⋅y\right)=-y+i⋅x$$

*לכן:*

$$x=Re\left(<v,w>\right)=Im\left(<v,-i⋅w>\right)$$

*מכאן נקבל:*

$$Im\left(<v,w>\right)=Re\left(<v,i⋅w>\right)=\frac{1}{2}⋅\left(\left|\left|v+i⋅w\right|\right|^{2}-\left|\left|v\right|\right|^{2}-\left|\left|i⋅w\right|\right|^{2}\right)$$

$$Im\left(<v,w>\right)=\frac{1}{2}⋅\left(\left|\left|v+i⋅w\right|\right|^{2}-\left|\left|v\right|\right|^{2}-\left|\left|w\right|\right|^{2}\right)$$

**זהות פולרית כללית**

$$<v,w> =\frac{1}{2}⋅\left(\left|\left|v+w\right|\right|^{2}-\left|\left|v\right|\right|^{2}-\left|\left|w\right|\right|^{2}\right)+\frac{1}{2}⋅\left(\left|\left|v+i⋅w\right|\right|^{2}-\left|\left|v\right|\right|^{2}-\left|\left|w\right|\right|^{2}\right) $$

**זהות פולרית ממשית – צורה נוספת**

$$<v,w> =\frac{1}{4}⋅\left(\left|\left|v+w\right|\right|^{2}-\left|\left|v-w\right|\right|^{2}\right)$$

**תרגיל:** *בדקו!*

***מרחב נורמי***

**הגדרה**

*יהי* $V\_{/F}$ *מרחב וקטורי. אומרים שפונקציה* $\left|\left|\right|\right|:V\rightarrow R$ *היא* ***נורמה*** *אם מתקיימים התנאים הבאים:*

1. *הומוגניות: לכל* $v\in V$ *ולכל* $α\in F$*:* $\left|\left|α⋅v\right|\right|=\left|α\right|⋅\left|\left|v\right|\right|$*.*
2. *חיוביות: לכל* $v\in V$*:* $\left|\left|v\right|\right|\geq 0$ *ו:* $\left|\left|v\right|\right|=0 ⇔v=\vec{0}$*.*
3. *אי שוויון המשולש: לכל* $v,w\in V$*:* $\left|\left|v+w\right|\right|\leq \left|\left|v\right|\right|+\left|\left|w\right|\right|$*.*

**שאלה:** *האם כל מרחב נורמי הינו מרחב מכפלה פנימית, או, מדויק יותר, האם כל נורמה מושרית ממכפלה פנימית?*

**משפט (כלל המקבילית)**

*יהי* $V\_{/F}$ *מרחב מכפלה פנימית ותהי* $<,>$ *מכפלה פנימית (מעל* $V$*) תהי* $\left|\left|\right|\right|$ *הנורמה המושרית ע"י מכפלה פנימית זו. אזי לכל* $v,w\in V$ *מתקיים:* $2⋅\left(\left|\left|v\right|\right|^{2}+\left|\left|w\right|\right|^{2}\right)=\left|\left|v+w\right|\right|^{2}+\left|\left|v-w\right|\right|^{2}$*.*

**הוכחה**

$$2⋅\left(\left|\left|v\right|\right|^{2}+\left|\left|w\right|\right|^{2}\right)=2⋅\left(<v,v>+<w,w>\right)$$

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2}+\left|\left|v-w\right|\right|^{2}=<v+w,v+w>+ <v-w,v-w>$$

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2}+\left|\left|v-w\right|\right|^{2} = <v,v> + <v,w> + <w,v> + <w,w>+ <v,v> - <v,w> - <w,v> + <w,w>$$

$$\left|\left|v+w\right|\right|^{2}+\left|\left|v-w\right|\right|^{2}=2⋅\left(<v,v> + <w,w>\right)$$

*לכן:*

$$2⋅\left(\left|\left|v\right|\right|^{2}+\left|\left|w\right|\right|^{2}\right)=\left|\left|v+w\right|\right|^{2}+\left|\left|v-w\right|\right|^{2}$$

**דוגמה**

$V=R^{2}$*. נגדיר, לכל* $p>0$*, את הנורמה הבאה: אם* $v=\left(\begin{matrix}α\_{1}\\α\_{2}\end{matrix}\right)$*, אז*

$\left|\left|v\right|\right|\_{p}=(\left|α\_{1}\right|^{p}+\left|α\_{2}\right|^{p})^{\frac{1}{p}}$*.*

**תרגיל***: בדקו שלכל* $p$*,* $\left|\left|\right|\right|\_{p}$ *היא אכן נורמה!*

**טענה**

$\left|\left|v\right|\right|\_{p}$ *מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם* $p=2$*.*

**הוכחה**

*ניקח:*

$$v=\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right),w=\left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right)$$

*נחשב:*

$$2⋅\left(\left|\left|v\right|\right|^{2}+\left|\left|w\right|\right|^{2}\right)=2⋅\left(1+1\right)=4=2^{2}$$

$$v+w=\left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right),v-w=\left(\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right)$$

$$\left|\left|v+w\right|\right|\_{p}^{2}+\left|\left|v-w\right|\right|\_{p}^{2}=2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{2}{p}}=2⋅2^{\frac{2}{p}}=2^{1+\frac{2}{p}}$$

אם כלל המקבילית מתקיים:

$$2^{2}=2^{1+\frac{2}{p}}$$

$$2=1+\frac{2}{p}$$

$$1=\frac{2}{p}$$

$$p=2$$

$$∎$$