נכתב על ידי נועם יערי

למה

תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. תהי

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)dt$$

אזי הפונקציה F רציפה בקטע $[a,b]$.

הוכחה

יהי $x \in [a,b]$. יש להוכיח:

$$F(x+h) \underset{h\to 0}{\to} F(x)$$

(עבור $x=a$ או $x=b$ יש לקחת גבול חד צדדי מתאים – תרגיל!)

נחשב:

$$|F(x+h)-F(x)| = \left|\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| =^* \left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right| \underset{h>0}{\leq_{\text{עבור}}}$$

$$\leq \int_x^{x+h} |f(t)|dt \leq b_{\coloneqq \sup\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|} \cdot |h| \underset{h\to 0^+}{\to} 0$$

(*תמיד $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx$)

עבור $h<0$:

$$\left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right| = \left|\int_{x+h}^{x} f(t)dt\right| \underset{\substack{\uparrow \\ x+h<x}}{\leq} \int_{x+h}^{x} |f(t)|dt \leq \beta\cdot|h| \underset{h\to o^-}{\to} 0$$

המשפט היסודי של חשבון אינפיניטסימלי

תהי f אינטג׳ ב - $[a,b]$. תהי

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)dt$$

מוגדרת בקטע. אזי לכל נקודת רציפות x של f מתקיים $F'(x) = f(x)$

דוגמה

לפונקציה e^{x^2} אין פונקציה קדומה אלמנטרית, אבל הפונקציה $F(x) \coloneqq \int_0^x e^{t^2}dt$ קדומה לפונקציה e^{x^2} ב - $[0,\infty)$.

ניסיון הוכחה למשפט היסודי

תהי x נקודת רציפות של f בקטע.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt=$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 0<h \text{ עבור} \\ \text{ממע"מ האינטגרלי}}}{=} \underset{\substack{[x,x+h] \\ x\le c_h\le x+h \\ \text{סנדוויץ'} \to x}}{f(c_h)}$$

ממשפט הערך הממוצע האינטגרלי: בתנאים מתאימים (f רציפה, $g\ge 0$ אינטג׳):

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

לאיזשהו c בקטע.

ניקח $g(x)\equiv 1$ (קבועה).

$$\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=f(c)\cdot\int_a^b 1dx=f(c)\cdot(b-a)$$

זאת אומרת

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(c)$$

לאיזשהו c בקטע.

הטעות בהוכחה: ההוכחה הנ״ל עובדת רק כאשר f רציפה בכל הקטע.

הוכחה מתוקנת

נתחיל כמוקדם: תהי x נקודת רציפות.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\cdots=\frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h}f(t)dt$$

f רציפה ב $x-$ לכן:

$$\overbrace{\inf_{t\in[x,x+h]}f(t)}^{\alpha_h},\overbrace{\sup_{t\in[x,x+h]}f(t)}^{\beta_h}\underset{h\to 0^+}{\to}f(x)$$

(לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך ש- $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ לכל $x\le t\le x+\delta$

$$f(x)-\varepsilon\le f(t)\le f(x)+\varepsilon\Rightarrow f(x)-\varepsilon\le\begin{matrix}\sup f(t)\\ \inf f(t)\end{matrix}\le f(x)+\varepsilon$$

בפרט אם ניקח $h<\delta$)

סנדוויץ':

$$f(x) \underset{h\to 0^+}{\leftarrow} \frac{1}{h}\cdot\alpha_h\cdot h \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \le \frac{1}{h}\cdot\beta_h\cdot h \underset{h\to 0^+}{\rightarrow} f(x)$$

(עבור $h<0$ נגדיר α_h,β_h עבור הקטע $[x+h,x]$)

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = -\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x} f(t)dt = \frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{x} f(t)dt$$

$$f(x) \underset{h\to 0^-}{\leftarrow} \frac{1}{|h|}\cdot\alpha_h\cdot |h| \le \frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{x} f(t)dt \le \frac{1}{|h|}\cdot\beta_h\cdot |h| \underset{h\to 0^-}{\rightarrow} f(x)$$

■

הנוסחה היסודית (לייבניץ – ניוטון)

תהי f רציפה בקטע $[a,b]$

תהי F פונקציה קדומה של f ב - $[a,b]$.

(למשל, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$)

אזי

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

הוכחה

עבור הפונקציה הקדומה $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ זה ברור:

$$F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)dt - \underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{=0}$$

כעת, תהי G פונקציה קדומה כלשהי של f בקטע. אזי יש קבוע c כך ש - $G(x)=F(x)+c$ בכל הקטע. לכן:

$$G(b)-G(a) = (F(b)+c)-(F(a)+c) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

■

סימון

$$F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$$

דוגמה

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2}|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

(ראינו בתחילת הנושא על ידי חישוב סכומים עליונים ותחתונים וגבולות)

הכללה של הנוסחה היסודית

תהי f אינטג׳ ב - $[a,b]$. תהי F פונקציה רציפה בקטע, ופרט למספר סופי של נקודות, F גזירה ומקיימת $F'(x) = f(x)$

אזי

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

הוכחה

תהי $P(n)$ סדרת חלוקות של $[a,b]$ עם $\lambda(P_n) \to 0$. נוסיף לכל P_n את הנקודות בהן לא מתקיים $F'(x) = f(x)$. עדיין $\lambda(P_n) \to 0$.

תהי P_n אחת מהחלוקות הנ״ל. בכל קטע $[x_{i-1}, x_i]$ בחלוקה, F רציפה בקטע (נתון) וגזירה ב - (x_{i-1}, x_i) (כיוון שהנקודות הבעייתיות הן קצוות של קטעים) ממע״מ,

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(d_i) = f(d_i)$$

לאיזשהי נקודה $d_i \in (x_{i-1}, x_i)$. זה יהי הניקוד החלוקה שנבחר ל $- P_n$. אזי :

$$\underset{\int_a^b f(x)dx}{\underset{\downarrow n\to\infty}{\sigma(P_n)}} = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot f(d_i) = \sum_{i=1}^{k} F(x_i) - F(x_{i-1}) =_{\text{טלסקופי}} F(b) - F(a)$$

■

דוגמה

$f(x) := [x]$ בקטע $[1,3]$.

ניקח $F(x) := \begin{cases} x\,, & 1 \le x \le 2 \\ 2x\,, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$

F גזירה בכל נקודה $x \neq 2$ ומקיימת $F'(x) = f(x)$. F אינה רציפה.

ננסה בכל זאת את הנוסחה היסודית:

$$3 = \int_1^3 f(x)dx =^? F(3) - F(1) = 6 - 1 = 5$$

לא נכון כי f לא רציפה!

אבל אם נוסיף קבועים שונים כרצוננו בקטעים השונים, אפשר לסדר את זה:

$$G(x) := \begin{cases} x+2, & 1 \le x \le 2 \\ 2x, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$G'(x) = f(x)$ לכל $x \neq 2$ ו- G רציפה בקטע לכן:

$$3 = \int_1^3 f(x)dx =^? G(3) - G(1) = 6 - 3 = 3$$