נכתב על ידי יהונתן רגב

הקשר בין אינטגרלים לא אמיתיים לטורים

מוסכמה

כל הפונקציות הנידונות אינטגרביליות בכל הקטעים $[a,b]$.

תזכורת

אם:

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

קיים, אז לכל $a<c$ מתקיים:

$$\int_a^\infty f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^\infty f(x)dx$$

מסקנה (התכנסות אינטגרל לא אמיתי תלויה רק בזנב)

תהי $a\in\mathbb{R}$. תהי f אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ לכל $a<b$.

התכונות הבאות שקולות:

1. האינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

קיים (במובן הצר).

2. קיים $a\le c$ כך שהאינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

קיים (במובן הצר).

3. לכל $a\le c$, האינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

קיים (במובן הצר).

הוכחה

$\boxed{1 \Leftarrow 3}$

עפ"י התזכורת.

$\boxed{3 \Leftarrow 2}$

מיידי.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

אותה הוכחה כמו בתזכורת.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right)$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

$\blacksquare$

תזכורת (מבחן ההשוואה)

אם קיים $0 < c \in \mathbb{R}$ כך ש: $0 \le f(x) \le c \cdot g(x)$, אז:

$$\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \infty \Longrightarrow \int_a^\infty g(x)dx = \infty$$

תזכורת

עבור $0 \le f(x)$, האינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

קיים במובן הרחב (מספר אי שלילי או אינסוף).

מסקנה (מבחן ההשוואה הגבולי)

יהיו $0 < f(x), g(x)$ כך ש:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c$$

עבור $0 < c < \infty$.

אזי:

$$\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$$

הוכחה

נקבע $\varepsilon > 0$ כך ש: $0 < c - \varepsilon$.

קיים N כך שלכל $x \geq N \geq a$ מתקיים:

$$0 < c - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < c + \varepsilon$$

לכן:

$$(1)\ \ 0 < f(x) < (c + \varepsilon) \cdot g(x)$$

$$(2)\ \ 0 < g(x) < \left(\frac{1}{c - \varepsilon}\right) \cdot f(x)$$

עפ"י מבחן ההשוואה:

1. אם:

$$\int_N^\infty g(x)dx < \infty$$

אז:

$$\int_N^\infty f(x)dx < \infty$$

2. אם:

$$\int_N^\infty f(x)dx < \infty$$

אז:

$$\int_N^\infty g(x)dx < \infty$$

כיוון שקיום אינטגרל לא אמיתי תלוי רק בזנב, המבחן הוכח.

■

דוגמה

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

לפונקציה e^{-x^2} אין קדומה אלמנטרית, לכן הנוסחה היסודית לא תעזור כאן.

נשווה ל - e^{-x}.

כיוון שהתכנסות אינטגרל לא אמיתי תלויה רק בזנב, נוכל להתבונן רק בתחום $1 \le x$, ושם:

$$x \le x^2 \implies e^{-x^2} \le e^{-x}$$

נחשב:

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_1^\infty = 0 + \frac{1}{e} < \infty$$

לכן, גם:

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx < \infty$$

לכן, גם:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \infty$$

$$\blacksquare$$

עובדה

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

הגדרה

האינטגרל הלא אמיתי:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

מתכנס בהחלט אם האינטגרל הלא אמיתי:

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

מתכנס (במובן הצר).

אם האינטגרל הלא אמיתי:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

מתכנס אך לא מתכנס בהחלט, נאמר שהוא **מתכנס בתנאי**.

למה

אינטגרל מתכנס בהחלט, מתכנס.

הוכחה

נוכיח שמתקיים הקריטריון של קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי.

יהי $0 < \varepsilon$.

קיים N כך שלכל $N \le b_1 < b_2$ מתקיים:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$$

עפ"י אי שוויון המשולש האינטגרלי:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \le \left|\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx\right|$$

לכן:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

לכן, גם $f(x)$ מתקיימת את קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי, לכן גם:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

מתכנס.

■

דוגמה

נוכיח כי:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}dx$$

מתכנס.

נראה התכנסות בהחלט:

$$|\sin(x)| \le 1$$

לכן:

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| dx = \int_1^\infty \frac{|\sin(x)\,|}{x^2}dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx < \infty$$

עפ"י מבחן ההשוואה סיימנו.

$$\blacksquare$$

דוגמה

אם לבסוף:

$$|f(x)| \le \frac{c}{x^\alpha} \quad ; \quad 0 < c \ , \ \alpha > 1$$

אז:

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

מתכנס (בהחלט).

אם לבסוף:

$$\frac{c}{x^\alpha} \le f(x) \quad ; \quad 0 < c \ , \ \alpha \le 1$$

אז:

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \infty$$

נימוק: השוואה ל:

$$\frac{1}{x^\alpha}$$

$$\alpha \ne 1 : \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^\infty = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\ , & 1<\alpha \\ \infty\ , & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1 : \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = [\log(x)]_1^\infty = \infty$$

■

מבחן דיריכלה

יהיו:

1. f רציפה ב - $[a,\infty)$ וקיים קבוע $c \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| < c$$

לכל $a < b$.

2. g גזירה ברציפות ב - $[a,\infty)$, $g(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$, והאינטגרל:

$$\int_a^b g'(x)\, dx$$

מתכנס בהחלט.

אזי:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\, dx$$

מתכנס.

הוכחה

תהי:

$$v(x) \coloneqq \int_a^x f(t)\, dt$$

אז:

$$dv = f\, dx \quad , \quad v'(x) = f(x)$$

תהי:

$$u(x) \coloneqq g(x)$$

אז:

$$du = dg \quad , \quad u'(x) = g'(x)$$

משום ש u, v – גזירות ברציפות, עפ״י אינטגרציה בחלקים:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = [g(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$\overbrace{g(b)}^{\xrightarrow{b\to\infty}0}\cdot\overbrace{v(b)}^{<c}\xrightarrow{b\to\infty}0$$

$$|v(x)\cdot g'(x)|\le c\cdot|g'(x)|$$

נתון:

$$\int_a^\infty |g'(x)|\,dx<\infty$$

עפ"י מבחן ההשוואה, גם:

$$\int_a^\infty |v(x)\cdot g'(x)|\,dx<\infty$$

כלומר:

$$\int_a^b v(x)\cdot g'(x)\,dx$$

מתכנס בהחלט, ובפרט מתכנס.

לכן, הגבול:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$$

קיים.

$$\blacksquare$$

מסקנה

$$g(x)\coloneqq\frac{1}{x^\alpha}$$

כדי ש: $g(x)\xrightarrow{x\to\infty}0$, דרוש: $0<\alpha$.

$$g'(x)=-\alpha\cdot x^{-\alpha-1}=-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

$0<\alpha$, לכן הנגזרת רציפה עבור $0<\alpha$.

דרוש:

$$\int_a^\infty g'(x)\,dx$$

קיים, כלומר: $0 < \alpha$.

מסקנה: אם $0 < \alpha$ ו f – מקיימת את (1), אז:

$$\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx$$

קיים.

דוגמה

נגדיר מחדש את $\frac{\sin(x)}{x}$ ב – 0 להיות 1.

האם האינטגרל:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

מתכנס?

$$\left|\int_0^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| = |1-\cos(b)| \le 2$$

עפ"י מבחן דיריכלה והמסקנה הנ"ל, נקבל שהאינטגרל:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

קיים.

התכנסות אינטגרל לא אמיתי תלויה רק בזנב, לכן גם האינטגרל:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

קיים.

עובדה

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

דוגמה

האינטגרל:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

אינו מתכנס בהחלט.

ניעזר במבחן ההשוואה.

$$\sin^2(x) = |\sin^2(x)| \overset{|\sin(x)|\le 1}{\le} |\sin(x)|$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin^2(x)}{x} \le \frac{|\sin(x)|}{x}$$

נחשב:

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_1^\infty \frac{1-\cos(2x)}{x}\,dx$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x}\,dx$$

נחשב:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\log(x)]_1^\infty = \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x}\,dx \overset{\substack{t:=2x\\ dt=2dx}}{=} \int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t}\,dt$$

האינטגרל:

$$\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t}\,dt$$

מתכנס כפי שהאינטגרל:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

מתכנס, שכן:

$$\left|\int_a^b \cos(t)\ dt\right| \le 2$$

ונפעיל את מבחן דיריכלה ואת המסקנה הקודמת.

לכן:

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}\ dx = \infty$$

עפ"י מבחן ההשוואה:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}\ dx = \infty$$

■

לקריאה עצמית

1. משפט: תהי $f(x) \ge 0$ יורדת ב - $[a,\infty)$ ואינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ עבור $a < b$.

   אזי:

   האינטגרל:

   $$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

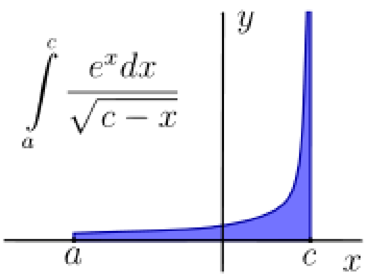
   והטור:

   $$\sum_{n=[a]+1}^{\infty} f(n)$$

   מתכנסים ומתבדרים יחד.

2. אינטגרלים לא אמיתיים מסוג שני

המחשה



■