מכניקה, 86115 אוניברסיטת בר-אילן תשע״ט סמסטר א'

מבחן - מועד א'

מרצה: פרופ' אסף פאר

הנחיות

זמן המבחן: 3 שעות

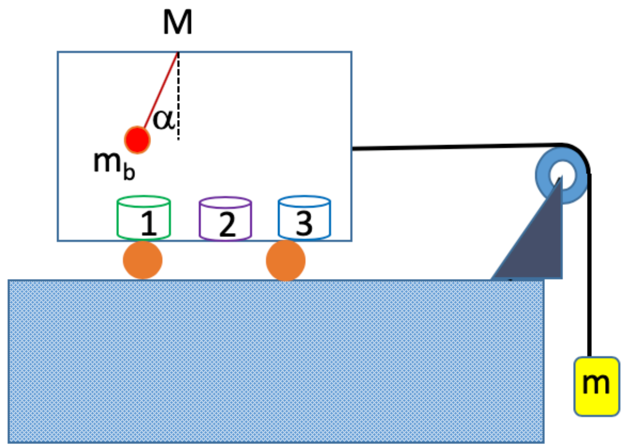
חומר עזר מותר: מחשבון כיס ודף הנוסחאות המצורף לבחינה זו.

כל חומר עזר אחר - אסור לשימוש בבחינה.

פתור/י את כל השאלות הבאות. ליד כל סעיף מצויינות נקודות הזכות. סך כל נקודות הזכות הוא 108 כך שחלק מהסעיפים הם סעיפי בונוס (הציון המקסימלי האפשרי במבחן הוא 100). כמו כן, חלק מהנתונים בשאלות עשויים להיות מיותרים.

1. מעבדה ניידת ממוקמת בקרון שמסתו הכוללת (כולל תכולתו) היא M. הקרון מואץ על ידי משקולת שמסתה m אינה ידועה. ניתן להזניח את החיכוך שבין גלגלי הקרון והרצפה.

   מתקרת הקרון קשור חוט, ובקצה החוט קשור כדור שמסתו m_b $(m_b \ll M)$. עקב תאוצת הקרון, החוט נמצא בזווית α מהאנך. כמו כן, על רצפת הקרון מונחים שלושה בולי עץ, בעלי מקדמי חיכוך שונים (ראה בהמשך).



(א) נתון שהזווית $\alpha = 37°$. חשב את מסת המשקולת m המאיצה את הקרונית. (6 נקודות).

(ב) נתון שמסת הכדור היא $m_b = 1$ kg. חשב/י את המתיחות בחוט המחזיק את הכדור. (3 נקודות).

(ג) ברגע מסויים נקרע החוט, והכדור נופל לרצפה. תאר/י במילים כיצד נראה מסלול הכדור (א) לצופה העומדת בתוך הקרונית, (ב) לצופה העומד ללא תנועה מחוץ לקרונית. (5 נקודות).

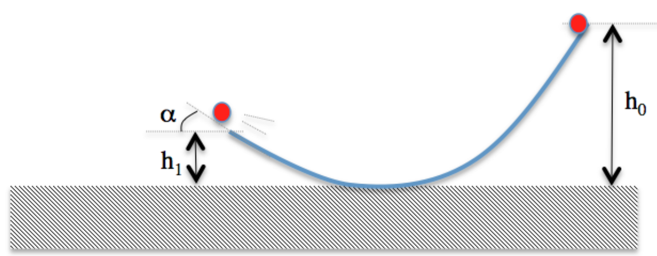
(ד) כאמור, על רצפת הקרונית שלושה בולי עץ. הראשון חלק- ללא חיכוך. מקדם החיכוך הסטטי של השני הוא $\mu_{s,2} = 0.9$ ומקדם החיכוך הקינטי שלו הוא $\mu_{k,2} = 0.8$. מקדמי החיכוך הסטטי והקינטי של בול העץ השלישי הם $\mu_{s,3} = 0.6$ ו- $\mu_{k,3} = 0.5$.

חשב/י את תאוצת שלושת בולי העץ (א) ביחס לצופה בקרונית, ו-(ב) ביחס לצופה על הקרקע. (12 נקודות).

הערה: כזכור,

$$\sin(37°) = 0.6\,, \quad \cos(37°) = 0.8.$$

2. כדור מלא ואחיד ברדיוס r ומסה m מתגלגל, ללא החלקה, במורד מגלשה מגובה התחלתי h_0 (ראה איור). הכדור נמצא במנוחה בנקודת ההתחלה. צידה השני של המגלשה נמצא בגובה h_1 ובזווית α מעל המישור. נניח שהכדור קטן- כלומר $r \ll h_0, h_1$. כזכור, הראינו בתרגול שמומנט האינרציה של כדור מלא ואחיד הוא $I = (2/5)mr^2$.



(א) חשב/י את גודל המהירות הקווית והמהירות הזוויתית של הכדור בזמן שהוא עוזב את המגלשה. (12 נקודות).

(ב) מהו הגובה המקסימלי, $h_{\max}$ אליו יגיע הכדור לאחר שעזב את המגלשה? (12 נקודות).

(ג) כיצד ישתנה $h_{\max}$ אם במקום כדור אחיד הכדור היה חלול (אבל עם אותה מסה ואותו רדיוס)? הערה: אין צורך לחשב, רק להסביר באופן איכותי. (5 נקודות).

3. כדור בעל מסה m ומהירות $\vec{v} = v\hat{x}$ מתנגש באופן אלסטי לחלוטין בכדור נייח, בכל מסה nm. כאן, n הוא קבוע נתון כלשהו, $n > 1$. נתון שאחרי ההתנגשות, גודל רכיב x של המהירות, כפי שנמדד במערכת מרכז המסה - זהה עבור שתי המסות.

(א) מהי מהירות מרכז המסה של הכדורים, **לפני ואחרי** ההתנגשות? (4 נקודות)

(ב) מהי מהירות הכדור הפוגע, במערכת מרכז המסה, לפני ההתנגשות? (4 נקודות)

(ג) מהי זווית הפיזור של הכדור הפוגע θ^{CM} כפי שנמדדת במערכת מרכז המסה? (12 נקודות)

(ד) מהי זווית הפיזור של הכדור הפוגע כפי שנמדדת במערכת הצופה הנייח ("מערכת המעבדה")? (6 נקודות)

4. פונקצית אנרגיה פוטנציאלית נפוצה לתיאור אינטרקציה בין שני אטומים זהים שמסתם m היא פוטנציאל $\mathrm{Lennard-Jones}$, שניתן על ידי

$$U = \epsilon\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right]$$

כאשר $\epsilon > 0$ ו- $r_0 > 0$ הם קבועים.

(א) ציירו את הפוטנציאל. (2 נקודות)

(ב) מצאו את נקודת המינימום של הפוטנציאל, וחשבו את ערכה. (6 נקודות)

(ג) מהו סוג נקודת שיווי המשקל שמצאתם בסעיף הקודם? האם קיימות מלבדה עוד נקודות שיווי משקל? (5 נקודות)

(ד) באזור נקודת המינימום האטומים מבצעים תנועת אוסצילטור הרמוני. מצאו את תדירות האוסצילציות. (14 נקודות)

בהצלחה !

תשובות

1. (א) נסמן את המתיחות בחוט המחזיק את הכדור ב- T. משוואת הכוחות על הכדור בצירי x, y הן

$$T\sin\alpha = m_b A$$
$$T\cos\alpha = m_b g$$

כש-A היא תאוצת הקרונית. נחלק, ונקבל

$$A = g\tan(\alpha) = 0.75g$$

את תאוצת הקרונית נחשב על ידי השוואת הכוחות בין הקרונית והמסה m:

$$mg - T_1 = mA;$$
$$T_1 = MA$$

ולכן

$$A = \frac{m}{M+m}g$$

ומכאן

$$\frac{m}{M+m} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad m = 3M$$

(ב)

$$T = m_b g/\cos(\alpha) = 12.5\ N.$$

(ג) צופה הנמצא מחוץ לקרונית יראה את הכדור נזרק אופקית (עם מהירות התחלתית בכיוון ימינה), ולכן מסלולו יהיה פרבולי.
צופה הנמצא בתוך הקרונית, יטען שלכדור תאוצה g בכיוון מטה, ובנוסף תאוצה $-A$ בכיוון האופקי (שמאלה). לכן, צופה זה יראה את הכדור נע בקו ישר בזווית $\alpha = 37°$ ביחס לאנך (המהירות ההתחלתית של הכדור ביחס לקרונית היא 0).

(ד) בול העץ הראשון מחליק ללא חיכוך. לכן צופה על הקרקע יראה אותו במנוחה (ללא תאוצה) וצופה בקרונית יראה אותו מאיץ בתאוצה $-A$.

נסמן את מסת בול העץ השני ב- m_2. כוח החיכוך הסטטי, $\mu_{s,2}m_2g = 0.9m_2g$ גדול מ- $m_2A = 0.75m_2g$ ולכן הגוף השני נמצא במנוחה ביחס לקרונית. לכן צופה בקרונית יראה את בול העץ במנוחה, וצופה על הקרקע יראה אותו מאיץ בתאוצת הקרונית $a_2 = A = 0.75g$ ימינה.

לעומת זאת, כוח החיכוך הסטטי של בול העץ השלישי נמוך מ- $m_3A = 0.75m_3g$, ולכן בול העץ יחליק. יפעל עליו כוח החיכוך הקינטי:

$$a_3 = \mu_{3,k}g = 0.5g$$

בכיוון ימינה.
תאוצתו יחסית לקרון תחושב על ידי חיסור התאוצות:

$$a_3' = a_3 - A = -0.25g$$

לכיוון שמאל.

2. (א) שימור אנרגיה יתן

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mg(h_0 - h_1)$$

$$I = \frac{2}{5}mr^2, \quad \omega = \frac{r}{r}$$

נציב,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}mr^2(v/r)^2 = \frac{!}{2}mv^2\left(1+\frac{2}{5}\right) = mg(h_0 - h_1)$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}g(h_0-h_1)} = \sqrt{14(h_0-h_1)}\,; \quad \omega = \sqrt{\frac{\frac{10}{7}g(h_0-h_1)}{r^2}}$$

(ב) כאשר הכדור עוזב את המגלשה, $v_x = v\cos\alpha$, $v_y = v\sin\alpha$. כאשר הכדור בשיא הגובה, $h = h_{\max}$, $v_y = 0$. נשתמש שוב בשימור אנרגיה:

$$\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2) + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_1 = \frac{!}{2}m(v_x^2+0) + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_{\max}$$

$$\frac{1}{2}mv_y^2 + mgh_1 = mgh_{\max}$$

$$h_{\max} = h_1 + \frac{1}{2g}v^2\sin^2\alpha = h_1 + \frac{5}{7}(h_0-h_1)\sin^2\alpha$$

(ג) עבור כדור חלול, המסה מרוכזת רחוק יותר מציר הסיבוב, ולכן מומנט האינרציה יהיה גדול יותר. לכן, כאשר הכדור עוזב את המגלשה, האנרגיה הסיבובית שלו תהיה גדולה יותר, ומכאן שהאנרגיה הקינטית המשוייכת לתנועה הקווית תהיה קטנה יותר. לכן בהכרח הגובה המקסימלי אליו יגיע יהיה קטן יותר מזה שחושב בסעיף הקודם.

3. (א) בהעדר כוחות חיצוניים, מהירות מערכת מרכז המסה קבועה. לפני ההתנגשות,

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{v}m}{m+nm} = \frac{1}{n+1}v\hat{x}$$

וזו גם המהירות אחרי ההתנגשות.

(ב) מהירות הכדור הפוגע במערכת מרכז המסה מחושבת ע"י חיסור מהירויות,

$$\vec{v}_{1,CM} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = v\hat{x} - \frac{1}{n+1}v\hat{x} = \frac{n}{n+1}v\hat{x}$$

(ג) בהתנגשות אלסטית, במערכת מרכז המסה גודל ווקטורי המהירות לפני ואחרי ההתנגשות נשמר:

$$|\vec{v}_{1,CM}(in)| = |\vec{v}_{1,CM}(out)| \quad |\vec{v}_{2,CM}(in)| = |\vec{v}_{2,CM}(out)|$$

ולכן לאחר ההתנגשות נקבל

$$\vec{v}_{1,CM}(out) = \frac{n}{n+1}v\left(\cos\theta^{CM}\hat{x} + \sin\theta^{CM}\hat{y}\right)$$

כאשר θ^{CM} היא זווית הפיזור כפי שנמדדת במערכת מרכז המסה.

$$\vec{p}_{2,CM}(out) = -\vec{p}_{1,CM}(out) = -\frac{n}{n+1}mv\left(\cos\theta^{CM}\hat{x} + \sin\theta^{CM}\hat{y}\right)$$

לכן גודל רכיבי המהירות בציר x לאחר ההתנגשות:

$$v_{1,CM,x}(out) = \frac{n}{n+1}v\cos\theta^{CM} \quad v_{2,CM,x}(out) = -\frac{1}{n+1}v\cos\theta^{CM}$$

נשווה ונקבל

$$(n+1)\cos\theta^{CM} = 0$$

מאחר ש- $n > 0$, הפתרון היחידי הוא

$$\cos\theta^{CM} = 0 \ \rightarrow \theta^{CM} = 90^\circ.$$

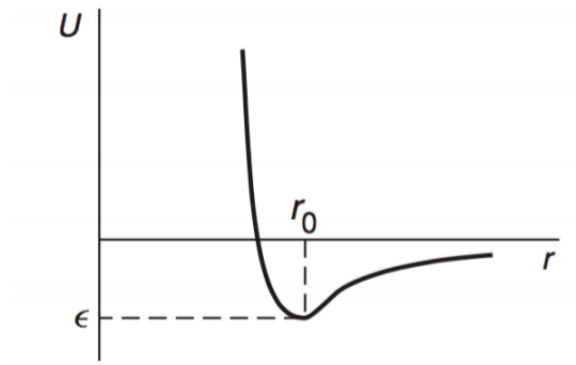
(ד) נחזור למערכת המעבדה:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_{1,CM} + \vec{v}_{CM} = \frac{n}{n+1} v\hat{y} + \frac{1}{n+1} v\hat{x}$$

ולכן זווית הפיזור היא

$$\tan\theta = \frac{n/(n+1}{1/(n+1)} = n \quad \to \quad \theta = \tan^{-1}(n).$$

4. (א) (ראה איור)



(ב) נגזור את הפוטנציאל:

$$\frac{dU}{dr} = \epsilon \left[-\frac{12 r_0^{12}}{r^{13}} + \frac{12 r_0^6}{r^7} \right] = 0$$

נקודת קיצון

$$-\frac{r_0^6}{r^6} + 1 = 0 \quad \to r^6 = r_0^6 \quad \to r = r_0.$$

סוג נקודת שיווי המשקל:

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \epsilon \left[\frac{156 r_0^{12}}{r^{14}} - \frac{84 r_0^6}{r^8} \right]$$

וב-$r = r_0$ נקבל

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} = \frac{\epsilon}{r_0^2}(156 - 84) = \frac{72\epsilon}{r_0^2} > 0$$

ולכן זו נקודת מינימום.
ערכו של הפוטנציאל

$$U(r = r_0) = \epsilon[1 - 2] = -\epsilon.$$

(ג) מאחר שזו נקודת מינימום, שיווי המשקל הוא יציב.
מלבד נקודה זו, אין עוד נקודות שיווי משקל.

(ד) נקרב את הפוטנציאל סוך לנקודת המינימום:

$$U(r) \approx U(r_0) + \left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} (r - r_0)^2$$

נציב את הגדלים שמצאנו:

$$U(r) \approx -\epsilon + 0 + \frac{1}{2} \frac{72\epsilon}{r_0^2} (r - r_0)^2$$

הקבוע לא תורם לאוסצילציות (ניתן להזיז את הפוטנציאל בקבוע) ולכן על ידי השוואת הפוטנציאל לזה של פוטנציאל הרמוני, $U = \frac{1}{2}k(r-r_0)^2$ נקבל

$$k = \frac{72\epsilon}{r_0^2}$$

מאחר שמדובר בשני אטומים, המסה היא המסה מצומצמת:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$$

(עבור $m_1 = m_2 = m$).
לכן תדירות האוסצילציות היא

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{72\epsilon}{r_0^2}\frac{2}{m}} = \frac{12}{r_0}\sqrt{\frac{\epsilon}{m}}$$

מכניקה - דף נוסחאות

1. משפט הקוסינוסים $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$
2. מכפלה וקטורית
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) - \hat{y}\left(A_xB_z - A_zB_x\right) + \hat{z}\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$
3. וקטורי יחידה בקואורדינטות פולריות
$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$
4. נגזרות של וקטורי יחידה בקואורדינטות פולריות
$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$
$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$$
5. מהירות בקואורדינטות פולריות $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$
6. תאוצה בקואורדינטות פולריות $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$
7. כללי גזירה
$$x(t) = f(t)g(t) \quad \dot{x}(t) = \dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t)$$
$$x(t) = f\left(g(t)\right) \quad \dot{x}(t) = \frac{df}{dg}\dot{g}(t)$$
8. כוח המשיכה $G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2} \qquad \vec{F} = \frac{Gm_1m_2}{|R_{12}^2|}\hat{R}_{12}$
9. כוח קולון $k = 9\times10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2} \qquad \vec{F} = \frac{kq_1q_2}{|R_{12}^2|}\hat{R}_{12}$
10. החוק השני של ניוטון $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
11. מרכז המסה $\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_1}$ תנע כולל $\vec{p}_{tot} = m_{tot}\frac{d}{dt}\vec{r}_{CM}$
12. תנע זוויתי $\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v}$ שימור תנע $\vec{T} = \vec{r}\times\vec{F} \quad ,\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}$
13. משוואת האליפסה (אחד המוקדים בראשית הצירים) $\epsilon = c/a \quad ,r_0 = b^2/a \quad ,r(\theta) = \frac{r_0}{1+\epsilon\cos\theta}$
14. תנועה קפלרית $r_0 = \frac{L^2}{GMm^2} \quad ,\epsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}$
15. משפט העבודה- אנרגיה $\frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(r_a) - U(r_b) \qquad \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y}\right)$
16. גוף קשיח: תנע זוויתי $L = I\dot{\theta}$ אנרגיה קינטית $E_k = \frac{1}{2}I(\dot{\theta})^2$
17. משפט שטיינר $U_r = I_{CM} + m_{tot}r^2$