פתרון תרגיל 2 אינפי 4:

1. וקטור הנגזרת של המסילה הוא $\gamma'(t)=(1,1,0)$ ולכן $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{2}$.

לפי הנוסחה לחישוב אינטגרל:

$$\int = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^1 (t+1+2t+3)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}(\frac{3t^2}{2}+4t)|_0^1 = \sqrt{2}\cdot\frac{11}{2}$$

2. נגדיר פרמטריזציה של שפת הריבוע:

$$\gamma(t)=\begin{cases}(t,t-1) & t\in[0,1]\\ (2-t,t-1) & t\in[1,2]\\ (2-t,3-t) & t\in[2,3]\\ (t-4,3-t) & t\in[3,4]\end{cases}$$

אפשר כמובן לעשות זאת בעוד דרכים; בתרגול (של אלעד) ראינו שאלה דומה (על משולש) שבה הגדרנו לכל צלע פרמטריזציה, חישבנו את האינטגרל לאורך כל צלע ולבסוף סכמנו את האינטגרלים.

בכל אחד מהחלקים של המסילה (בכל אחת מצלעות הריבוע) הנורמה של וקטור הנגזרות היא $\sqrt{2}$.

האינטגרל שלנו הוא סכום האינטגרלים:

$$\int_0^1 (t^2+t-1)\sqrt{2}dt+\int_1^2 ((2-t)^2+t-1)\sqrt{2}dt+\int_2^3 ((2-t)^2+3-t)\sqrt{2}dt+\int_3^4 ((t-4)^2+(3-t))dt$$

אלו אינטגרלים פשוטים.

3. נחשב את האינטגרל לפי ההגדרה. תהי T חלוקה כלשהי של הקטע $[a,b]$ עליו מוגדרת המסילה:

$$T: a=t_1<t_2<\dots t_n=b$$

נחשב את סכום רימן כאשר הפונקציה עליה אנחנו עושים אינטגרציה היא זהותית 1:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(\tau_i))\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} L(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}) = L(\gamma)$$

כאשר $n \to \infty$. השתמשנו באדיטיביות של האינטגרל.

4. נגדיר: $g = f \circ \gamma$ ואם כן, לפי כלל השרשרת:

$$g'(t) =< \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) >$$

נזכור ש: $df = f_{x_1}dx_1 + \cdots + f_{x_n}dx_n$ ולכן:

$$\int\limits_{\gamma} df = \int\limits_{\gamma} \nabla f \cdot dx = \int\limits_{a}^{b} \nabla f(\gamma'(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int\limits_{a}^{b} g'(t)dt = g(b) - g(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

5. נגדיר $t(x) = \|x\|$. שימו לב שלכל $1 \leq k \leq n$ מתקיים:

$$\frac{\partial t}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\|x\|}$$

לפי הרמז יש להתבונן בפונקציה $f(x) = \int_1^{||x||} s\varphi(s)ds$ כלומר על הפונקציה:

$$h(t) = \int\limits_{1}^{t} s\varphi(s)ds$$

כאשר $f(x) = h(t(x))$ ולכן לפי כלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{dh(\|x\|)}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x_k}(x) = t\varphi(t)|_{t=\|x\|} \cdot \frac{x_k}{\|x\|} = F_k(x)$$

כנדרש.