

דף תרגילים 5

תרגיל 1 חשבו את אורך העקומה $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ באשר $t \in [0, 1]$.

פתרון 1

$$\alpha'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$$

לכן

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$$

לכן אורך העקומה הוא

$$\int_0^1 e^t + e^{-t} dt = e - \frac{1}{e}$$

תרגיל 2 הראו שהעקומות הבאות נתונות בפרמטריזציית אורך קשת, וחשבו את העקמוניות שלהן.

1. $\alpha(s) = \left(\frac{1}{3}(1+s)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$

2. $\alpha(s) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$

פתרון 2

1.

$$\alpha'(s) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+s}, -\frac{1}{2}\sqrt{1-s}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$|\alpha'(s)| = \sqrt{\frac{1}{4}(1+s) + \frac{1}{4}(1-s) + \frac{1}{2}} = 1$$

2.

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{4}{5} \sin t, -\cos t, \frac{3}{5} \sin t \right)$$

$$|\alpha'(s)| = \sqrt{\frac{16}{25} \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25} \sin^2 t} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

תרגיל 3

1. מיצאו פרמטריזציית אורך קשת לעקומה $\alpha(t) = (4 \cos t, 5 - 5 \sin t, -3 \cos t)$.

2. חשבו את העקמוניות של העקומה מסעיף קודם.

פתרון 3

1.

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-4 \sin t, -5 \cos t, 3 \sin t) \\ |\alpha'(t)| &= \sqrt{16 \sin^2 t + 25 \cos^2 t + 9 \sin^2 t} = 5 \\ s(t) &= \int_0^t 5 d\tau = 5t \\ t(s) &= \frac{s}{5} \\ \beta(s) &= \alpha(t(s)) = \alpha\left(\frac{s}{5}\right) = \left(4 \cos \frac{s}{5}, 5 - 5 \sin \frac{s}{5}, -3 \cos \frac{s}{5}\right)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \left(-\frac{4}{5} \sin \frac{s}{5}, -\cos \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}\right) \\ \beta''(s) &= \left(-\frac{4}{25} \cos \frac{s}{5}, \frac{1}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{25} \cos \frac{s}{5}\right) \\ k(s) &= |\beta''(s)| = \frac{1}{25} \cos^2 \frac{s}{5} + \frac{1}{25} \sin^2 \frac{s}{5} = \frac{1}{25}\end{aligned}$$

תרגיל 4 מציאו את העקמוניות של האליפסה $x^2 + 2y^2 = 3$

פתרון 4 נגדיר $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3$ אז

$$|\nabla F| = \left| \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4x^2 + 16y^2}$$

נחשב את אופרטור בייטמן

$$\begin{aligned}D_B(F) &= F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 \\ &= 2(4y)^2 + 4(2x)^2 = 16x^2 + 32y^2 = 16(x^2 + 2y^2) = 16 \cdot 3 = 48 \\ k &= \frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3} = \frac{48}{(4x^2 + 16y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

תרגיל 5 מציאו נקודה או נקודות (אם קיימות) של עקמוניות מקסימלית על העקומות הבאות:

1. $3x^2 + 4y^2 = 1$

2. $y = e^x$

3. $y^2 - 5 + xy = 0$

פתרון 5

1. נגדיר $F(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 1$ אז

$$|\nabla F| = \left| \begin{pmatrix} 6x \\ 8y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36x^2 + 64y^2} = \sqrt{1 + 16y^2}$$

נחשב את אופרטור בייטמן

$$\begin{aligned}D_B(F) &= F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 \\ &= 6(8y)^2 + 8(6x)^2 = 384y^2 + 288x^2 = 96(4y^2 + 3x^2) = 96 \\ k &= \frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3} = \frac{96}{(1 + 16y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

מקסימום מתקבל כאשר המכנה מינימלי כלומר כאשר $y = 0$ כלומר ב- $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$.

2. נגזיר $F(x, y) = e^x - y$ אז

$$|\nabla F| = \left| \begin{pmatrix} e^x \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{e^{2x} + 1} = \sqrt{y^2 + 1}$$

נחשב את אופרטור בייטמן

$$D_B(F) = F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = e^x(-1)^2 = e^x = y$$

לכן עקמוניות

$$k = \frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3} = \frac{y}{(y^2 + 1)^{3/2}}$$

נחפש נקודות קריטיות

$$k'(y) = \frac{(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - y \cdot \frac{3}{2} \sqrt{y^2 + 1} \cdot 2y}{(y^2 + 1)^3} = \frac{y^2 + 1 - 3y^2}{(y^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

כלומר $2y^2 = 1$ כלומר $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. זו אכן נקודת מקסימום (למשל לפי טבלה). לסיכום עקמוניות מקסימלית מתקבלת ב- $(\ln \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

3. נגזיר $F(x, y) = y^2 - 5 + xy$ אז

$$|\nabla F| = \left| \begin{pmatrix} y \\ 2y + x \end{pmatrix} \right| = \sqrt{y^2 + (2y + x)^2} = \sqrt{5y^2 + 4xy + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 20}$$

נחשב את אופרטור בייטמן

$$D_B(F) = F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = 0 - 2 \cdot y(2y + x) + 2y^2 = -2y^2 - 2xy = 2(y^2 + xy) = 10$$

לכן עקמוניות

$$k = \frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3} = \frac{10}{(x^2 + y^2 + 20)^{3/2}}$$

נחפש נקודות קריטיות של $k(x, y)$ על העקומה, כלומר נבודד את $x = \frac{5-y^2}{y}$

$$k = \frac{10}{\left(\frac{(5-y^2)^2}{y^2} + y^2 + 20\right)^{3/2}} = \frac{10}{\left(\frac{(5-z)^2}{z} + z + 20\right)^{3/2}}$$

באשר סימנו $z = y^2$ לשם נוחות הגזירה. הביטוי מקסימלי כאשר המכנה מינימלי, כלומר כאשר $g(z) = \frac{(5-z)^2}{z} + z$ מינימלי. $g'(z) = \frac{z^2 - 25}{z^2} = 0$ כלומר $z = 5$ וקל לראות שזו אכן נקודת מינימום. $y = \sqrt{5}$ כלומר המקסימום של העקמוניות מתקבל ב- $(0, \sqrt{5})$.

תרגיל 6 מציאו את העקמוניות של עקומת החיתוך של הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ עם המישור $x + y + z = 1$ [רמז: עקומת החיתוך היא עיגול. מה הרדיוס שלו?]

פתרון 6 רדיוס הספירה 2 ומרכז ראשית הצירים. לפי משפט פיתגורס, רדיוס עיגול החיתוך בין הספירה למישור הוא $r = \sqrt{2^2 - d^2}$ כאשר d המרחק ממרכז הספירה (ראשית הצירים) למרכז עיגול החיתוך. מרחק זה הוא מרחק המישור $x + y + z = 1$ מהנקודה $(0, 0, 0) = (x_0, y_0, z_0)$. כלומר

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

כלומר רדיוס עיגול החיתוך הוא $\sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{3}}$ $\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{3}{11}}$ לכן העקמוניות היא