1. יהיו $A=\{4,7,3\}, B=\{1,8\}$. מצאו את כל הפונקציות האפשריות מA לB.

פתרון: יש 8 פו, אפשריות.

פונקציה ראשונה:

$f(4)=f(7)=f(3)=1$.

פונקציה שניה:

$f(4)=f(7)=f(3)=8$

פונקציה שלישית:

$f(4)=f(7)=1, f(3)=8$

פונקציה רביעית:

$f(4)=f(7)=8, f(3)=1$

פונקציה חמישית:

$f(4)=1, f(7)=f(3)=8$

פונקציה שישית:

$f(4)=8, f(7)=f(3)=1$

פונקציה שביעית:

$f(4)=f(3)=1, f(7)=8$

פונקציה שמינית:

$f(4)=f(3)=8, f(7)=1$

2. חשבו את ההרכבה של הפונקציות הבאות:

א. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $g(x)=\cos(x)$. חשבו את $f\circ g$ ואת $g\circ f$.

ב. $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\mathbb{N}, C=\mathbb{Z}$, כאשר $\mathbb{N}$ מסמן את המספרים השלמים החיוביים, ו$\mathbb{Z}$ מסמן את המספרים השלמים.

$f:A\to B$ מוגדרת כך: $f(1)=2, f(2)=4, f(3)=10, f(4)=7, f(5)=1$.

$g:B\to C$ מוגדרת כך: $g(x)=x-5$.

פתרון:

א. $f\circ g(x)=f(g(x))=f(\cos(x))=\dfrac{1}{(\cos x)^2+1}$.

$g\circ f(x)=g(f(x))=g(\dfrac{1}{x^2+1})=\cos(\dfrac{1}{x^2+1})$

ב. $g\circ f(1)=g(f(1))=g(2)=-3$

$g\circ f(2)=g(f(2))=g(4)=-1$

$g\circ f(3)=g(f(3))=g(10)=5$

$g\circ f(4)=g(f(4))=g(7)=2$

$g\circ f(5)=g(f(5))=g(1)=-4$

3. נתונה $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת: $h(x)=|2^{3x}|$. מצאו פונקציות $f,g,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $h=f\circ g\circ k$.

פתרון:

נקח $k(x)=3x$, $g(x)=2^x$, $f(x)=|x|$.

4. נראה שההרכבה $g \circ f : A \to C$ היא על (לא ניתן להרכיב בסדר השני). יהי $c \in C$. כיוון ש-g היא על, קיים $b \in B$ כך ש- g(b)=c. כעת נתבונן באיבר b. כיוון ש-f היא על, קיים $a \in A$ כך ש-f(a)=b. אז עבור אותו $a \in A$ נקבל:

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c \ .$$

בכך הראינו שלכל $c \in C$ קיים $a \in A$ כך ש- $(g \circ f)(a) = c$. זה מוכיח ש- $g \circ f : A \to C$ היא על.

5.

(א)

כדי להוכיח ש- $g_1 = g_2$ נראה שלכל $a \in A$, $g_1(a) = g_2(a)$. יהי $a \in A$. מההנחה $f \circ g_1 = f \circ g_2$ נובע: $f(g_1(a)) = f(g_2(a))$. כיוון ש- f חח"ע, בהכרח $g_1(a) = g_2(a)$, וזה מראה ש- $g_1 = g_2$.

(ב)

נסמן ב- a_1, a_2 שני איברים <u>שונים</u> ב-A, כך ש- $f(a_1) = f(a_2)$ (איברים כאלו קיימים כיוון ש-f אינה חד חד ערכית). נסמן ב-x את התמונה של שני איברים אלו בפונקציה f, כלומר $f(a_1) = x = f(a_2)$.

תהי $g_1 : A \to A$ הפונקציה הקבועה $g_1(a) = a_1$ לכל $a \in A$. ותהי $g_2 : A \to A$ הפונקציה הקבועה $g_2(a) = a_2$ לכל $a \in A$. אז מההגדרה, $g_1 \neq g_2$. כעת נראה ש- $f \circ g_1 = f \circ g_2$.

לכל $a \in A$, $(f \circ g_1)(a) = f(g_1(a)) = f(a_1) = x$. כלומר $f \circ g_1$ זו הפונקציה הקבועה שמתאימה לכל אברי A את x.

כמו כן, לכל $a \in A$, $(f \circ g_2)(a) = f(g_2(a)) = f(a_2) = x$. כלומר גם $f \circ g_2$ זו הפונקציה הקבועה שמתאימה לכל אברי A את x.

קיבלנו: $f \circ g_1 = f \circ g_2$.

(ג)

יהי $a \in A$, עלינו להראות ש- $g_1(a) = g_2(a)$. כיוון ש- f היא על, קיים $x \in A$ כך ש- $f(x) = a$. ולכן $g_1(a) = g_1(f(x))$. בדומה, $g_2(a) = g_2(f(x))$. מההנחה $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ נובע $g_1(f(x)) = g_2(f(x))$ ולכן $g_1(a) = g_2(a)$, וזאת לכל $a \in A$. זה מוכיח ש- $g_1 = g_2$.

(ד)

כיוון ש- f אינה על, קיים $x \in A$ שאינו בתמונה של f .

נסמן ב- a_1, a_2 שני איברים <u>שונים</u> ב-A (הם קיימים כי נתון שב-A יש לפחות 2 איברים).

תהי $g_1 : A \to A$ פונקציה שמקיימת $g_1(a) = a_1$ לכל $a \in A$ (כלומר הפונקציה הקבועה שמתאימה את כל אברי A ל- a_1 . בפרט, מתקיים: $g_1(x) = a_1$ (לאותו x שאינו בתמונה של f).

תהי $g_2 : A \to A$ פונקציה שמקיימת $g_2(a) = a_1$ לכל $a \in A$ כך ש- $x \neq a$, ו- $g_2(x) = a_2$. כלומר g_2 מתאימה לכל אברי A למעט האיבר x את a_1 , ול-x היא מתאימה את a_2 . נשים לב ש- $g_1(x) \neq g_2(x)$, ולכן g_1 ו- g_2 שונות זו מזו.

כעת נראה שההרכבות $g_1 \circ f$ ו- $g_2 \circ f$ שוות זו לזו: יהי $a \in A$. $(g_1 \circ f)(a) = g_1(f(a)) = a_1$

כעת: $(g_2 \circ f)(a) = g_2(f(a))$. נשים לב ש- $f(a) \neq x$ כי x אינו בתמונה של f . ולכן $g_2(f(a)) = a_1$.

קיבלנו, אם כן, שלכל $a \in A$ $(g_1 \circ f)(a) = (g_2 \circ f)(a)$, ולכן $g_1 \circ f = g_2 \circ f$.