תרגיל 1

אינטגרלים וטורים

1. מצאו עבור אילו ערכי α האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ מתכנס. לאילו ערכים הוא מתכנס בהחלט?

פתרון:

(א) נוכיח כי האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ מתכנס לכל $\alpha > 0$ לפי מבחן דריכלה:

לכל $\alpha > 0$, $\frac{1}{x^\alpha}$ היא פונקציה מונוטונית יורדת ושואפת לאפס.

בנוסף, $G(x) = \int_1^x \cos t\ dt$ היא פונקציה חסומה כיוון ש:

$$|G(x)| = \left|\int\limits_1^x \cos t\ dt\right| = |-\sin x + \sin 1| \leq |\sin x| + |\sin 1| < 2$$

ולכן לפי דריכלה האינטגרל מתכנס.

(ב) נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר את התכנסות האינטגרל $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^\alpha}dx$.

i. עבור $\alpha > 1$, האיטגרל הנ"ל מתכנס לפי מבחן ההשוואה לאינטגרלים חיוביים: $\frac{|\cos x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$ והאינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ מתכנס.

עבור $\alpha \leq 1$ נוכיח כי הוא מתבדר:

ראשית, עבור $\alpha \leq 1$ $\frac{|\cos x|}{x^\alpha} \geq \frac{|\cos x|}{x} \geq \frac{\cos^2 x}{x}$ ולכן לפי מבחן ההשוואה מספיק להוכיח את התבדרות האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x}dx$.

נשתמש בזהות $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x}dx = \int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx + \int\limits_1^\infty \frac{1}{2x}dx$$

$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2}dx$ מתכנס לפי דריכלה, ו $\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx$ מתבדר ונקבל בסה"כ כי האינטגרל מתבדר.

לסיכום:

עבור $\alpha > 1$ האינטגרל מתכנס בהחלט, ועבור $\alpha \leq 1$ האינטגרל מתכנס בתנאי.

2. קבעו התכנסות של האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x}dx$

(ב) $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^\alpha}dx$ פצלו לפי ערכי α מתאימים.

פתרון:

(א) נשתמש בזהות $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x}dx = \int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx + \int\limits_1^\infty \frac{1}{2x}dx$$

$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2}dx$ מתכנס לפי דריכלה, ו $\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx$ מתבדר ונקבל בסה"כ כי האינטגרל מתבדר.

(ב) עבור $\alpha > 1$: $\frac{\cos^2 x}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$ וכיוון ש $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ מתכנס אזי גם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^\alpha}dx$ מתכנס.
עבור $\alpha \le 1$: $\frac{\cos^2 x}{x^\alpha} \le \frac{\cos^2 x}{x}$. לפי סעיף א' $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x}dx$ מתבדר ולכן גם האינטגרל שלנו מתבדר.

3. השתמשו במבחן האינטגרל כדי לקבוע התכנסות של הטורים הבאים:

(א) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$
(ב) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$
(ג) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}}{2^{n\sqrt{n}}}$

פתרון:

שלושת הטורים הם טורים חיוביים, והפונקציות המתאימות הם מונוטוניות יורדות, ולכן האינטגרלים מתכנסים או מתבדרים ביחד עם האינטגרלים המתאימים:

(א) האינטגרל המתאים:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)} = \lim_{R\to\infty} \ln(\ln(\ln x))|_1^R = \infty$$

ולכן הטור מתבדר.

(ב) האינטגרל המתאים:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} = -e^{-\sqrt{x}}|_1^\infty = e^{-1} < \infty$$

ולכן הטור גם מתכנס.

(ג) האינטגרל המתאים:

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{2^{x\sqrt{x}}} = -\frac{2}{3}2^{-x^{1.5}}|_1^\infty < \infty$$

ולכן הטור גם מתכנס.

4. קבעו התכנסות לגבי הטורים הבאים (מתכנס בהחלט/מתבדר/מתכנס בתנאי):

(א) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n+5}{3^n}$
(ב) $\sum_{n=2}^\infty \frac{2}{\sqrt{n-1}}$
(ג) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2-1}{n^2+1}$
(ד) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!}$
(ה) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n!\alpha^n}{n^n}$, $\alpha > 0$
(ו) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
(ז) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^4-n^2}}$

פתרון:

(א) הטור הוא טור חיובי ומתקיים $\frac{4}{3^n} \le a_n \le \frac{6}{3^n}$.
נשתמש במבחן קושי:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$$

ולכן הטור מתכנס לפי קושי.
דרך נוספת: כיוון ש $a_n \le \frac{6}{3^n}$, והטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{6}{3^n}$ הוא טור הנדסי מתכנס, נובע לפי מבחן ההשוואה הראשון כי גם הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n+5}{3^n}$ מתכנס (ולכן מתכנס בהחלט).

(ב) הטור חיובי, ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי. נסמן $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ונחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{n-1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}2\sqrt{\frac{n}{n-1}} = 2$$

כלומר הטור 'חבר' של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ שהוא טור מתבדר, ולכן גם הטור שלנו מתבדר.

(ג) נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1} = 1 \neq 0$ כלומר תנאי הכרחי לא מתקיים, והטור מתבדר.

(ד) נבדוק התכנסות לפי מבחן דאלמבר:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

(ה) נבדוק התכנסות לפי מבחן דאלמבר:

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\alpha^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+!}\,n!\alpha^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\alpha}{e}$$

ולכן הטור מתכנס עבור $0 < \alpha < e$, ומתבדר עבור $\alpha \geq e$ (עבור $\alpha = e$ נקבל כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ כיוון ש $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ שואף מונוטונית לe מלמטה).

(ו) נבדוק קודם התכנסות בהחלט:

i. $|a_n| = \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) = \ln(1+n) - \ln n$. נחשב את סדרת הסכומים החלקיים:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(1+n) - \ln n = \ln(1+n) - \ln 1 = \ln(1+n)$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\ln(1+n) = \infty$$

כלומר הטור מתבדר, כלומר אין התכנסות בהחלט.

$\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$מונוטוונית יורדת לאפס, והטור הוא טור עם סימנים מתחלפים, ולכן הוא טור לייבניץ, והטור מתכנס בתנאי.

(ז) נבדוק התכנסות בהחלטת כלומר את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4-n^2}}$.

i. ראשית נפשט את הביטוי: $\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2(n^2-1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^4-n^2}}$.

ii. ונבצע מבחן השוואה גבולי עם $\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = 1$$

כלומר הטור 'חבר' של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ וכיוון שהוא טור מתכנס, גם הטור שלנו מתכנס בהחלט.

5. יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$טור חיובי מתכנס. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n a_{+1}}{a_n+a_{n+1}}$ גם מתכנס.

פתרון:

כיוון שמדובר בטורים חיוביים, מספיק להוכיח לפי מבחן ההשוואה הראשון כי $\frac{a_n a_{+1}}{a_n+a_{n+1}} < a_n$. לשם כך מספיק להראות כי $\frac{\left(\frac{a_n a_{+1}}{a_n+a_{n+1}}\right)}{a_n} < 1$. ואכן:

$$\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_n a_{+1}}{a_n+a_{n+1}}\right) = \frac{a_{+1}}{a_n+a_{n+1}} < \frac{a_{+1}}{a_{n+1}} = 1$$

כדרוש.

6. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים. הוכיחו או הפריכו:

אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרון:

הפרכה:

נגדיר $a_n = \frac{1}{n}$, ו $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. אכן מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 0$$

וכן כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ טור מתכנס, אך $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ הוא טור מתבדר.

סדרות של פונקציות

1. בסדרות הפונקציות הבאות מצאו את פונקצית הגבול (אם קיימת), וקבעו האם ההתכנסות היא במידה שווה:

(א) $f_n(x) = \cos^{2n}(x)$ בקטע $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(ב) $f_n(x) = \frac{\arctan(x)}{n}$ בכל $\mathbb{R}$.

(ג) $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ בקטע $(0,\infty)$.

(ד) $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{x^2+n}$ בקטע $[0,1]$.

(ה) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ בקטע $\left(\frac{1}{100}, \infty\right)$.

פתרון:

(א) בקטע $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ מתקיים כי $0 \le \cos^2(x) \le 1$. ולמעשה $0 \le \cos^2(x) < 1$ חוץ מאשר בנקודה $x = 0$. לכן פונקצית הגבול היא:

$$\lim_{n\to\infty} \cos^{2n}(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & x \ne 0 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

קיבלנו פונקצית גבול לא רציפה עבור סדרת פונקציות רציפות, ולכן ההתכנסות היא לא במידה שווה.

(ב) נמצא את פונקצית הגבול: $\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(x)}{n} = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. ולכן פונקצית הגבול היא $f(x) = 0$.

נשתמש המבחן הlim-sup כדי לבדוק התכנסות במ"ש:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{\arctan(x)}{n} \right\} = \frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$$

ולכן יש התכנסות במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

(ג) נמצא את פונקצית הגבול: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx+1} = 0$ לכל $x > 0$. ולכן פונקצית הגבול היא $f(x) = 0$.

נשתמש המבחן הlim-sup כדי לבדוק התכנסות במ"ש:

$$\sup_{x\in(0,\infty)} \left\{ \frac{1}{nx+1} \right\} = 1$$

ולכן אין התכנסות במ"ש בקטע.

(ד) נמצא את פונקצית הגבול: $\lim_{n\to\infty} x^2+\frac{1}{x^2+n}=x^2$ ולכן פונקצית הגבול היא $f(x)=x^2$.
נשתמש במבחן הlim-sup כדי לבדוק התכנסות במ"ש:

$$\sup_{x\in[0,1]}\left\{x^2+\frac{1}{x^2+n}-x^2\right\}=\sup_{x\in[0,1]}\left\{\frac{1}{x^2+n}\right\}=\frac{1}{n}$$

כיוון ש $\frac{1}{x^2+n}$ היא פונקציה יורדת בקטע $[0,1]$.
כעת,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

ולכן יש התכנסות במ"ש בקטע $[0,1]$.

(ה) נמצא את פונקצית הגבול: $\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. ולכן פונקצית הגבול היא $f(x)=0$.
נשתמש המבחן הlim-sup כדי לבדוק התכנסות במ"ש
נמצא את ה sup ע"י גזירה ואיפוס:

$$\frac{d}{dx}\frac{nx}{1+n^2x^2}=n\frac{1+n^2x^2-x\cdot 2n^2x}{\left(1+n^2x^2\right)^2}=\frac{n-n^3x^2}{\left(1+n^2x^2\right)}=0$$

נקודת הקיצון מתקבלת בנקודה $x=\frac{1}{n}$, לפניה הנגזרת חיובית ואחריה שלילית ולכן זוהי נקודת מקסימום.
אבל, $x=\frac{1}{n}\in\left(\frac{1}{100},\infty\right)$ רק עבור $n<100$, ועבור $n\geq 100$ הנגזרת יורדת בקטע $\left(\frac{1}{100},\infty\right)$ ולכן הsup הוא:

$$\sup_{x\in\left(\frac{1}{100},\infty\right)}\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}=\begin{cases}\frac{nx}{1+n^2x^2}|_{x=\frac{1}{n}}=\frac{1}{2} & n<100\\ \frac{nx}{1+n^2x^2}|_{x=\frac{1}{100}}=\frac{n}{1000+n^2} & n\geq 100\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000+n^2}=0$$

כלומר יש התכנסות במ"ש בקטע $\left(\frac{1}{100},\infty\right)$.