מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132 ,88-132)

תשע"ט, מועד א'

מרצים: פרופ' מיכאל כץ, ד"ר לואי ג'נינגס, אלעד עטייא, דורון פרלמן.

מתרגלים: רועי אבל, אורלי בארשבסקי, אבי כדריה, עקיבה מלכה, דורון פרלמן.

משך המבחן: 3 שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון המצייר פונקציות). כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

<u>שימו לב: עליכם לנמק היטב את כל התשובות.</u>

<u>שאלה 1 (21 נקודות)</u>

א. (7 נק') תהי f פונקציה רציפה ב-x_0, g פונקציה שאיננה רציפה ב-x_0. הוכיחו או הפריכו: $f+g$ איננה רציפה ב-x_0.

הטענה נכונה. הוכחה: נניח בשלילה ש-$f+g$ רציפה ב-x_0. לכן $(f+g)-f$ גם כן רציפה ב-x_0 כהפרש של רציפות, כלומר g רציפה ב-x_0 וזו סתירה להנחה.

ב. (7 נק') יהיו $a\approx a'$, $b\approx b'$ מספרים היפרממשיים. הוכיחו או הפריכו: $ab\approx a'b'$.

הטענה לא נכונה. נראה דוגמא נגדית: נבחר $a = \epsilon$, $a' = 2\epsilon$ באשר ϵ מספר אינפיניטסימלי השונה מ-0. נבחר $b = b' = \frac{1}{\epsilon}$. אז $ab = 1, a'b' = 2$ לא קרובים אינסופית זה לזה.

ג. (7 נק') יהיו ϵ, δ מספרים אינפיניטסימליים חיוביים. הוכיחו או הפריכו: ϵ^{δ} מספר אינפיניטסימלי חיובי.

הטענה לא נכונה. נראה דוגמא נגדית: נסתכל על ϵ^{ϵ} באשר ϵ מספר אינפיניטסימלי חיובי. נראה ש-$st(\epsilon^{\epsilon}) = 1$ ובפרט לא אינפיניטסימלי.
אכן, $st(\epsilon^{\epsilon}) = lim_{x\to 0^+} x^x = lim\, e^{xln(x)} = e^{lim\, xln(x)} = e^0 = 1$
כי $lim_{x\to 0^+} xln(x) = lim \frac{ln(x)}{x^{-1}} = lim \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = lim(-x) = 0$.

<u>שאלה 2 (22 נקודות)</u>

א. (11 נק') תהי $f(x) = \begin{cases} 6ln(e^3 + 2 - x) & x < 2 \\ x^2 + 4x + 6 & 3 > x \geq 2 \\ \frac{6x+36}{\pi} arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right) & x \geq 3 \end{cases}$.

מיצאו את f' בנקודות בהן f גזירה.

לפי כללי גזירה,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-6}{e^3 + 2 - x} & x < 2 \\ 2x + 4 & 3 > x > 2 \\ \dfrac{6}{\pi} arcsin\left(\dfrac{1}{x-2}\right) - \dfrac{6x + 36}{\pi\sqrt{1 - \frac{1}{(x-2)^2}}(x-2)^2} & x > 3 \end{cases}$$

ונשאר לבדוק אם הפונקציה גזירה בנקודות x=2, x=3.

בנקודה x=2 משמאל מקבלים לפי לופיטל

$lim_{x\to 0^-} \frac{6ln(e^3 - x) - 18}{x} = lim \frac{-6}{e^3 - x} = \frac{-6}{e^3}$ ומימין מקבלים

$$lim_{x\to 0^+}\frac{(2+x)^2+4(2+x)+6-18}{x}=lim_{x\to 0^+}x+8=8$$

כלומר הפונקציה לא גזירה בנקודה x=2.

בנקודה x=3 מימין מקבלים לפי לופיטל

$$lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{6(3+x)+36}{\pi}arcsin\left(\frac{1}{1+x}\right)-27}{x}=$$

$$lim\ \frac{6}{\pi}arcsin\left(\frac{1}{1+x}\right)+\frac{54+6x}{\pi}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{(1+x)^2}}(1+x)^2}=\infty$$

כי הביטוי הימני שואף לאינסוף ושאר הביטויים סופיים.

כלומר הפונקציה לא גזירה בנק' x=3.

ב. (11 נק') האם f' רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$? אם לא – מיצאו את נקודות אי-הרציפות של f', **וסווגו אותן**.

עבור $x<2$, וכן עבור $2<x<3$, וכן עבור $x>3$, הפונקציה f' גזירה כחיבור, חיסור, כפל, חילוק והרכבה של פונקציות רציפות (כי המכנים לא מתאפסים, השורשים חיוביים, ו-$y=arcsin(x)$ רציפה עבור $-1<x<1$).

בנקודות $x=2, x=3$ הנגזרת f' לא מוגדרת לכן ודאי לא רציפה.

נסווג את הנקודה $x=2$: הגבול משמאל הוא $\frac{-6}{e^3}$ ומימין הוא 8, כלומר נקודת אי-הרציפות היא ממין ראשון (קפיצה).

נסווג את הנקודה x=3: הגבול מימין ב-x=3 של

$$\frac{6}{\pi}arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right)+\frac{-6x-36}{\pi\sqrt{1-\frac{1}{(x-2)^2}}(x-2)^2}$$

הוא אינסופי (כי הביטוי הימני אינסופי והשמאלי סופי. הימני אינסופי כי המכנה שואף ל-0 בעוד המונה שואף ל--36), לכן נקודת אי-הרציפות היא ממין שני (עיקרית).

שאלה 3 (22 נקודות)

א. (11 נק')   תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b). יהיו $x_1, x_2 \in (a,b)$.
הוכיחו כי קיימת $x \in (a,b)$ כך ש- $f(x) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

נגדיר $g(x) = f(x) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. זו פונקציה רציפה בקטע כי f רציפה שם.

$$g(x_1) = f(x_1) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{2}$$

$$g(x_2) = f(x_2) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{2}$$

כלומר $g(x_1) = -g(x_2)$. לכן או ש-$g(x_1) = 0$ או שאחד מבין $g(x_1), g(x_2)$ חיובי והשני שלילי, ואז לפי ערך הביניים יש נקודה ביניהם בה $g(c) = 0$. בכל מקרה קיבלנו נק' x בקטע בה $g(x) = 0$, מש"ל.

ב. (11 נק')   הוכיחו שלכל $0 < a < b$ מתקיים $\frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}}$.

לפי משפט לגרנז' עבור הפונקציה $f(t) = \sqrt{t}$ בקטע $[a,b]$ (בו היא רציפה וכן גזירה בקטע הפתוח המתאים כי a>0) קיימת $a < c < b$ כך ש-$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$.
כיוון ש-$a < c < b$ מתקיים $\frac{1}{2\sqrt{a}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$ כלומר $\frac{1}{2\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$ כדרוש.

<u>שאלה 4 (22 נקודות)</u>

א. (11 נק')   חשבו את הגבול $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$.

$$4^n \le 2^n + 3^n + 4^n \le 3 \cdot 4^n$$

לכן

$$4 \le \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \le 4 \cdot \sqrt[n]{3}$$

הסדרה הימנית שואפת ל-4 וכך גם הסדרה השמאלית, לכן לפי משפט הסנדויץ הסדרה הנתונה גם היא שואפת ל-4.

ב. (11 נק') חשבו את הגבול $lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+9}\right)^{3n^3+9}$.

$$lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+9}\right)^{3n^3+9} = lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+9-10}{2n^3+9}\right)^{3n^3+9}$$

$$= lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-10}{2n^3+9}\right)^{3n^3+9}$$

$$= lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-10}{2n^3+9}\right)^{\frac{2n^3+9}{-10}}\right)^{\frac{-10(3n^3+9)}{2n^3+9}} = e^{-15}$$

לחלופין ע"י הטריק של $e^{ln(..)}$ ומעבר לפונקציה המתאימה בשביל להשתמש בלופיטל.

<u>שאלה 5 (21 נקודות)</u>

עבור כל אחד מהטורים הבאים, קיבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר:

א. (7 נק') $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\,ln\,n}$

נבדוק בהחלט: צריך לבדוק את ההתכנסות של $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln\,n}$. הסדרה $\frac{1}{n\,ln\,n}$ יורדת לכן ניתן להשתמש בעיבוי: הטור הוא חבר של הטור

$\sum \frac{1}{\text{n}} \frac{1}{ln2} = \sum \frac{2^n}{2^n \, ln(2^n)}$ המתבדר, לכן מתבדר. כלומר טור הערכים המוחלטים לא מתכנס.

נבדוק התכנסות: הסדרה $\frac{1}{n\, ln\, n}$ יורדת ושואפת ל-0 לכן לפי מבחן לייבניץ הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\, ln\, n}$ מתכנס.

לסיכום: הטור מתכנס בתנאי.

ב. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+7n^2}{\sqrt{5n^6-n+14}}$

זה טור חיובי. נבצע מבחן השוואה גבולי עם הטור $\sum \frac{1}{\text{n}}$:

$$\frac{2n+7n^2}{\sqrt{5n^6-n+14}} \cdot \frac{n}{1} = \frac{2n^2+7n^3}{\sqrt{5n^6-n+14}} = \frac{2n^{-1}+7}{\sqrt{5-n^{-5}+14n^{-6}}}$$

$$\to \frac{7}{\sqrt{5}}$$

כלומר הטורים חברים. לכן מהתבדרות $\sum \frac{1}{\text{n}}$ מקבלים את התבדרות הטור שלנו.

ג. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{sin(n^2)}{n^{5/4}}$

נבדוק התכנסות בהחלט: צריך לבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sin(n^2)|}{n^{5/4}}$.

מתקיים $\frac{|sin(n^2)|}{n^{5/4}} \leq \frac{1}{n^{5/4}}$ לכן מהתכנסות $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ שהוא טור-p עם p>1 מקבלים את התכנסות $\sum \frac{|sin(n^2)|}{n^{5/4}}$ (מבחן השוואה ראשון).

כלומר הטור מתכנס בהחלט.

בהצלחה!