

אינפי 1 – מדמ"ח – פתרון תרגיל 6

1. א. מיצאו את $\frac{dy}{dx}$ עבור $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (זוהי משוואת מעגל שרדיוסו r ומרכזו (a, b)).

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b} \quad \text{לכן } 2(x-a)+2(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

ב. הסיקו כי המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה (הדרכה: מיצאו את שיפוע הרדיוס, כלומר הישר המחבר את נקודת המרכז לנקודה (x, y) על המעגל, והראו כי הוא הפכי ונגדי לשיפוע המשיק שמצאתם בסעיף א').

שיפוע הישר העובר דרך הנקודות (a, b) ו- (x, y) הוא: $m_r = \frac{y-b}{x-a}$.

ראינו בסעיף הקודם כי שיפוע המשיק למעגל בנקודה (x, y) הוא $m_t = -\frac{x-a}{y-b}$.

מתקיים: $m_r \cdot m_t = -1$ לכן אכן הם מאונכים.

2. מיצאו את $\frac{dy}{dx}$ עבור:

א. $e^{\sin x} = \cos(x^2-1)y$

$$e^{\sin x} \cos x = -\sin(x^2-1)2xy + \cos(x^2-1)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sin x} \cos x + \sin(x^2-1)2xy}{\cos(x^2-1)} \quad \text{לכן}$$

ב. $\sin(\cos(\sin x)) = \cos(\sin(\cos y))$

$$\cos(\cos(\sin x))(-\sin(\sin x))\cos x = -\sin(\sin(\cos y))\cos(\cos y)(-\sin y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos(\cos(\sin x))\sin(\sin x)\cos x}{\sin(\sin(\cos y))\cos(\cos y)\sin y}$$

ג. $e^{e^y}(x^2+1)^{x^2+1} = 0$

נסמן $v = (x^2+1)^{x^2+1}$, $u = e^{e^y}$ מתקיים:

$$\frac{du}{dx} = e^{e^y} e^y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = ((x^2+1)^{x^2+1})' = (e^{(x^2+1)\ln(x^2+1)})' = (x^2+1)^{(x^2+1)}(2x \ln(x^2+1) + 2x)$$

לכן כעת נוכל לבצע גזירה סתומה על המשוואה המקורית:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{e^y} e^y \frac{dy}{dx} (x^2+1)^{x^2+1} + e^{e^y} (x^2+1)^{x^2+1} 2x(1+\ln(x^2+1))}{e^{e^y} (x^2+1)^{x^2+1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x(1+\ln(x^2+1))}{e^y}$$

3. באיזה נקודות הפונקציות הבאות גזירות?

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \sin x & x \leq 5 \\ \cos x - 12 & x > 5 \end{cases} \quad \text{א.}$$

בנקודה $x=5$ הפונקציה לא גזירה כי עבור $0 < \Delta x \approx 0$ נקבל כי $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(5+\Delta x) - 12 - (10 + \sin 5)}{\Delta x}$ אינסופי לכן אין לו חלק סטנדרטי. (הסבר: המונה משמעותי כי $-1 \leq \cos(5+\Delta x) \leq 1$ וכן $-1 \leq \sin 5 \leq 1$, לכן המונה הוא בין -24 ל- -20 , כלומר משמעותי. המכנה אינפיניטיבי, לכן משמעותי חלקי אינפיניטיבי הוא אינסופי). בכל נקודה אחרת הפונקציה גזירה לפי כללי הגזירה שלמדנו. לכן לסיכום: f גזירה לכל $x \neq 5$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq -3 \\ x^3 + 37 & x > -3 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

נבדוק גזירות בנקודה $x = -3$:

עבור $0 < \Delta x \approx 0$ נקבל:

$$\text{כלומר } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(-3+\Delta x)^3 + 37 - (3^2 + 1)}{\Delta x} = \frac{-27 + 27\Delta x - 9\Delta x^2 + \Delta x^3 + 37 - 10}{\Delta x} = 27 - 9\Delta x + \Delta x^2$$

$$\text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 27$$

עבור $0 > \Delta x \approx 0$ נקבל:

$$\text{כלומר } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(-3+\Delta x)^2 + 1 - (3^2 + 1)}{\Delta x} = \frac{9 - 6\Delta x + \Delta x^2 + 1 - 10}{\Delta x} = -6 + \Delta x$$

$$\text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = -6$$

קיבלנו שתי תוצאות שונות עבור שני ערכי Δx שונים לכן הפונקציה לא גזירה בנקודה $x = -3$. מצד שני הפונקציה גזירה בכל נקודה אחרת לפי כללי הגזירה שלמדנו. לסיכום הפונקציה גזירה לכל $x \neq -3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 0 \\ (x+1)^2 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

לכל $x \neq 0$ הפונקציה גזירה לפי כללי הגזירה שלמדנו. נשאר לבדוק מה קורה בנקודה $x = 0$:

עבור $0 < \Delta x \approx 0$:

$$\text{כלומר } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\Delta x + 1)^2 - (0 + 1)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

ועבור $0 > \Delta x \approx 0$:

$$\text{כלומר } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + 1 - (0 + 1)^2}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

כלומר קיבלנו ש- $\text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 2$ לכל $0 \neq \Delta x \approx 0$, לכן הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$ (ונגזרתה 2).

לסיכום הפונקציה גזירה לכל $x \in \mathbb{R}$.

4. מציאו לפי הגדרה (כלומר הציבו $x = x_0 + \Delta x$) את הגבולות של הפונקציות הבאות $f(x)$ בנקודה $x = a$:

$$\text{א. } f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad a = 3$$

$$\text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \text{st}\left(\frac{(3+\Delta x)^2 + 2(3+\Delta x) - 1 - (3^2 + 2 \cdot 3 - 1)}{\Delta x}\right) = 14$$

$$a=2, f(x)=\frac{x^3-1}{x-1} \quad \text{ב.}$$

$$\text{st}\left(\frac{(2+\Delta x)^3-1}{2+\Delta x-1}\right)=\frac{(2+0)^3-1}{2+0-1}=7$$

$$a=1, f(x)=\frac{x^3-1}{x-1} \quad \text{ג.}$$

$$\text{st}\left(\frac{(1+\Delta x)^3-1}{1+\Delta x-1}\right)=\text{st}\left(\frac{1+3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3-1}{\Delta x}\right)=\text{st}(3+3\Delta x+\Delta x^2)=3$$

5. א. נניח כי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ לא קיים וכן כי $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ לא קיים. מה ניתן לאמר על קיום או אי-קיום $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)+g(x))$?

לא ניתן להסיק כלום. נראה שתי דוגמאות, באחת מהן הגבול לא קיים ובשניה הגבול קיים:

• תהינה $f(x)=g(x)=\begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$. לא קיימים הגבולות בנקודה $x=0$, וכן לפונקציה $f(x)+g(x)$ לא

קיים הגבול בנקודה $x=0$: $f(x)+g(x)=\begin{cases} -2 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}$

• תהי $f(x)=g(x)=\begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ ותהי $g(x)=-f(x)=\begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases}$. שוב הגבולות לא קיימים בנקודה

$x=0$, אך הפעם $f+g$ שווה זהותית לאפס (כלומר זוהי פונקציית האפס), לכן הגבול שלה קיים ב-0.

ב. נניח כי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים וכי $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ לא קיים. מה ניתן לאמר על קיום או אי-קיום $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)+g(x))$?

בהכרח ניתן להסיק כי הגבול לא קיים: אכן, נניח בשלילה כי $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)+g(x))$ קיים. מתקיים:

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)+g(x)) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ולפי משפט אריתמטיקה של גבולות, כיוון ששני הגבולות בצד ימין קיימים, גם הגבול בצד שמאל קיים, בסתירה לנתון. מש"ל.