הרצאה 7

נכתב על ידי נועם יערי

הגדרה

(Ω, P) מרחה הסתברות דיסקרטי. ($\sum P(w) = 1$,$P: \Omega \to \mathbb{R}$)

משתנה מקרי הוא פונקציה $X: \Omega \to \mathbb{R}$.

ההתפלגות של X:

$$P(X = a) \equiv P(X(w) = a \equiv P(\{w|X(w) = a\}) \equiv P\left(X^{-1}(a)\right)$$

הגדרה

התפלגות של משתנה מקרי היא הפונקציה $a \longmapsto P(X = a)$

הגדרה

אם $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ משתנים מקריים. **ההתפלגות המשותפת** היא הפונקציה המקיימת:

$$(a, b) \longmapsto P(X = a, Y = b) \equiv P(\{w|X(w) = a, Y(w) = b\})$$

הערה

מאורע הוא "מקרה פרטי" של משתנה מקרי:

Ω – מרחב

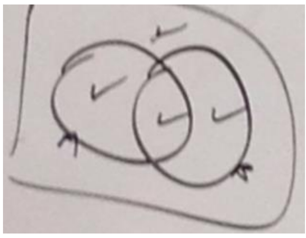
$A \subseteq \Omega$ מאורע

משתנה מציין $X_A = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$

$$\{w|X_A = 1\} = A, P(X = 1) = P(A)$$

דוגמה

נניח ש – $A, B \in \Omega$, X_A, X_B המשתנים המציינים. התפלגות המשותפת של X_A, X_B מתארת את כל ההסתברויות המסומנות בציור



בהכללה של משתנים מציינים, כל משתנה מקרה מתאר חלוקה.

נוסחת ההסתברות השלמה

$$\Omega = \dot{\bigcup} B_n , A \subseteq \Omega, P(A) = \sum P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

יהיו $A \subseteq \Omega$ מאורע ו - $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ משתנים מקריים. אזי.

$$P(A) = \sum_{y \in \mathbb{R}} P(A|Y = y) \cdot P(Y = y)$$

הערה

יהי X משתנה מקרי. אז קבוצת הנקודות $\{a|P(X = a) > 0\}$ סופית או בת מניה.

הסבר

$K_n := \left\{a_{\in\mathbb{R}} \middle| P(X=a) \geq \frac{1}{n}\right\}$ לכן,

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \cdots$$

בזכות הארכימדיות של $\mathbb{R}$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \{a | P(X=a) > 0\}$$

לכל n, $|K_n| \leq n$

$$\Rightarrow \left|\bigcup K_n\right| \leq \aleph_0$$

הסתברות מותנית על זוג משתנים מקריים

מתבקש ליישם את הרעיון של הסתברות מותנית על זוג משתנים מקריים.

דוגמה

זורקים שתי קוביות ומסמנים את התוצאות ב – X, Y.

$$P(X=2) = \frac{1}{6}$$

$$P(X=2|Y=6) = \frac{1}{6}$$

לעומת זאת

$$P(X=2|X+Y=4) = \frac{1}{3}$$

נסמן ב – X_A, X_B את המשתנים המקריים של המאורעות A, B.

$$A = \{w | X_A(w) = 1\}$$

$$B = \{w | X_B(w) = 1\}$$

A, B בלתי תלויים $\Leftrightarrow$ $_{P(A\cap B)=} P(X_A=1, X_B=1) = P(X_A=1)_{=P(A)} \cdot P(X_B=1)_{=P(B)}$.

הגדרה

המשתנים המקריים X, Y בלתי תלויים אם

$$\forall a, b: P(X=a, Y=b) = P(X=a) \cdot P(Y=b)$$

לדוגמה

A, B בלתי תלויים $\Leftrightarrow$ X_A, X_B

בדרך כלל, התכונה הנ״ל עבור a, b מסוימים אינה מספיקה לגרור אי תלות.

a	2	3	4	5
$P(X=a)$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

הרצאה 7

נכתב על ידי נועם יערי

20.03.2016

הגדרה

המשתנים המקריים $X_1, \cdots, X_k$ **הם בלתי תלויים במשותף** אם

$$P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \cdots, X_k = a_k) = P(X_1 = a_1) \cdot \ldots \cdot P(X_k = a_k)$$

לדוגמה

המאורעות $A_1, \cdots A_k$ בלתי תלויים במשותף $\Leftrightarrow$ המשתנים המציינים $X_{A_1}, \cdots X_{A_k}$ בלתי תלויים במשותף.

תרגיל

נתונים $d < n$.

להמציא מערכת של n משתנים מקריים כך שכל d הם קבוצה בלתי תלויה וכל $d+1$ הם תלויים.

דוגמה

נתאר מערכת של 3 משתנים מקריים, שאינם בלתי תלויים במשותף, כך שכל 2 בלתי תלויים.

נסמן ב – A_1, A_2 שתי הטלות מטבע (משתנים מקריים בלתי תלויים).

נסמן –

$$X_1 = A_1$$

$$X_2 = A_2$$

$$X_3 = (A_1 + A_2)(mod\ 2)$$

נקבל:

$X_{1=A_1}$	$X_{2=A_2}$	X_3	$P =$
0	0	0	$\frac{1}{4}$
0	1	1	$\frac{1}{4}$
1	0	1	$\frac{1}{4}$
1	1	0	$\frac{1}{4}$

הרצאה 7

נכתב על ידי נועם יערי

שאלה

האם אפשר להמציא שלושה משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, X, Y, Z.

$$P(Y > X) = \theta$$

$$P(Z > Y) = \theta$$

$$P(X > Z) = \theta$$

$$\theta > \frac{1}{2}$$

(כן. מהו θ המקסימלי?)

מה הם מעגלים פרדוקסליים ארוכים יותר?

תוחלת

התוחלת של משתנה מקרי (אם מוגדר) הוא מספר:

$$E(X)=\sum_a P(x=a)\cdot a$$

דוגמה

X הוא משתנה מקרי עם ההתפלגות הבאה:

$$1\le n, P(X=n)=\frac{6}{\pi^2 n^2}$$

זה אכן משתנה מקרי כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X=n)=\frac{6}{\pi^2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}}=1$$

מה התוחלת?

$$E(X)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi^2 n^2}\right)\cdot n=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

התוחלת הוא ממוצע של הערכים a X משוקלל לפי ההסתברות..

נוסחה פשוטה:

$$E\big(f(x)\big)=\sum_{a=f(x)\text{ ערך של }}P(f(x)=a)\cdot a=\sum_{b=X\text{ ערך של }}P\big(f(x)=f(b)\cdot f(a)\big)$$

$$E\big(f(x)\big)=\sum P(X=b)\cdot f(b)$$