מבחן מועד א' תשע"ו־פתרון

25 ביוני 2018

חלק ב'
שאלה 3
א) מצא מס' מרוכב z המקיים $z^2=\bar{z}$
ב) מצא לאילו ערכים של k למערכת הבאה:

$$\begin{cases} x-3z=-3 \\ 4x+2ky-2z=-4 \\ x+2y+kz=1 \end{cases}$$

יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אין פתרון
פתרון:
א) נבחר $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$
$(x+iy)^2=x-iy$
$x^2+2xyi-y^2=x-iy$

$$\begin{cases} 2xy=-y \\ x^2-y^2=x \end{cases}$$

ולכן $y(2x-1)=0 \leftarrow y=0$ או $x=-\frac{1}{2}$
אם $y=0$ אזי $x^2=x$ ולכן $x=0,1$
אם $x=-\frac{1}{2}$ אזי $\frac{1}{4}-y^2=-\frac{1}{2}$ ולכן $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
סה"כ נקבל $z=0,1,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$
ב) נבנה מטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 2k & -2 & -4 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{pmatrix}$$

לאחר דירוג נקבל את המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2k & 10 & -16 \\ 0 & 0 & k^2+3k-10 & -2k+16 \end{pmatrix}$$

אם $k^2+3k-10=0$ כלומר $k_{1,2}=-5,2$ נקבל שורת סתירה ולכן אין פתרון למערכת

אם $k=0$ אזי נקבל את המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -16 \\ 0 & 0 & -10 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בצורה המדורגת יש שורת אפסים ולכן יש אינסוף פתרונות.
בכל מקרה אחר יש פתרון יחיד.

שאלה 4

נתונה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א) מצא בסיס ומימד לתתי המרחבים הבאים:
$N(A), C(A)\bigcap R(A)$
ב)הסביאו לפי א' האם A הפיכה.
ג) מצאו מיהו המרחב הניצב ל: $span\{N(A), C(A)\bigcap N(A)\}$
פתרון:
א) נדרג את A ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון למערכת הומוגנית הינו:
$y=-z$
$x=z$
ולכן $N(A)=\left\{\begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$R(A)=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$C(A)=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

נמצא את $C(A)\bigcap R(A)$ בשיטת מיטל:
נכתוב את הוקטורים בעמודות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & -1 & 0 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 & -3 & b-2a \\ 0 & 1 & -2 & -2 & c-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 & -3 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c-b+a \end{pmatrix}$$

קל לראות שלמערכת יש פתרון לכל a,b,c ולכן החיתוך הוא אפס.

ב) A לא הפיכה לפי א' כי למערכת ההומוגנית שלה יש גם פתרון לא טריוויאלי, כלומר יש פתרון ששונה מאפס ולכן המטריצה אינה הפיכה.
ג) לפי א' : $N(A)\bigcup\{0\}=N(A)$ ולכן המרחב הנוצב למרחב האפס של A הוא מרחב השורה $R(A)$.

שאלה 5

יהי $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס למרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
א) הוכיחו כי לכל וקטור $v\in V$ קיימת הצגה יחידה $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$
ב) תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. הוכיחו שגם: $Av_1,Av_2,...,Av_n$ מהווה בסיס למרחב.
ג) תהי $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, $0\notin S$ קבוצה אורטוגונאלית (כלומר קבוצה שבה כל הוקטורים מעונכים אחד לשני, או באופן יותר פורמאלי $\langle v_i,v_j\rangle=0$ לכל $i\neq j$.
הוכיחו כי S בת"ל.
ד) האם קיימת מטריצה $A\in\mathbb{R}^{3\times2}$ כך ש- $C(A)=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$, $N(A)=sp\{(2,-1)\}$.

פתרון:

א) פתרנו בכיתה
ב) נרשום: $\alpha_1Av_1+...+\alpha_nAv_n=0$
צ"ל: $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$
הוכחה:
$A(\alpha_1v_1+....+\alpha_nv_n)=0$, A הפיכה ולכן לפי המשפט מההרצאה בהכרח $\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n=0$
אבל v_i , $1\le i\le n$ הם וקטורי הבסיס ולכן $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, כלומר $Av_1,Av_2,....,Av_n$ בת"ל.
ג) נרשום: $(*)\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n=0$
צ"ל: $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$
הוכחה: לפי הנתון, כל הוקטורים ב-S מאונכים אחד לשני.
בנוסף אם נבחר ב-S וקטור כלשהו ונעשה מכפלה פנימית עם הצירוף $(*)$ נקבל:
$$0\underset{\langle 0,v_i\rangle=0}{=}\langle\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n,v_i\rangle=\langle\alpha_1v_1,v_i\rangle+..+\langle\alpha_iv_i,v_i\rangle+...+\langle\alpha_nv_n,v_i\rangle=$$
$$=\alpha_1\langle v_1,v_i\rangle+...+\alpha_i\langle v_i,v_i\rangle+....+\alpha_n\langle v_n,v_i\rangle=\alpha_i\|v_i\|^2=0$$
כל הוקטורים ב-S שונים מוקטור האפס ולכן בהכרח $\alpha_i=0$.
זה נכון לכל α_i כאשר $1\le i\le n$ ולכן הוקטורים ב-S הם בת"ל.
ד) נבנה מטריצה
$$\begin{pmatrix}1&x\\2&y\\3&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
ולכן $x=2$, $y=4$, $z=6$
נראה שהמטריצה
$$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{pmatrix}$$
מקיימת את תנאי השאלה:

נשים לב שהדרגה של המטריצה שווה לאחד.

$$C(A) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$N(A) = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$