אינפי 3 - סיכום הסיכומים

הרצאה 1 - מכפלה פנימית, נורמה, מטריקה

הגדרה: יהי $v\in\mathbb{R}^n$. הנורמה של V מסומן ב $\|v\|$ ומוגדר להיות האורך של V.
עבור $\mathbb{R}^2$ נקבל: $\|v\|=\sqrt{x^2+y^2}$, עבור $\mathbb{R}^n$ נקבל: $\|v\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}$

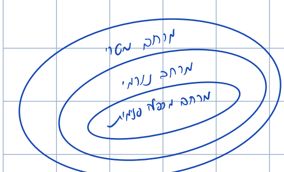
הגדרה: המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$: יהי $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$, $v=(v_1,v_2,\dots,v_n)$
כך ש $u,v\in\mathbb{R}^n$. אזי המכפלה הפנימית (נקרא גם מכפלה סקלרית) של u ו-v מוגדר ע"י:
$$u\cdot v=\langle u,v\rangle=u_1v_1+u_2v_2+\dots+u_nv_n=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i$$

משפט: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$, אזי מתקיים $u\cdot v=\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\theta$ כאשר θ הזווית בין u ל-v.
כמו כן, ניתן לחלץ ולרשום: $\theta=\arccos\frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$

משפט: אי שוויון קושי שוורץ: $|u\cdot v|\le\|u\|\cdot\|v\|$
טענה: אי שוויון קושי שוורץ הכללי: יהי V מרחב מ"פ, אזי $|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|$ $\forall u,v\in V$:

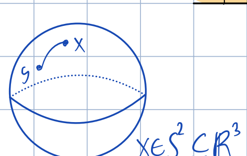
הגדרה: יהי $V_\mathbb{R}$ מרחב וקטורי. פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle:V\times V\to\mathbb{R}$ נקראת מכפלה פנימית אם:
1) אי שליליות: $\langle u,u\rangle=0\Leftrightarrow u=0$, $\langle u,u\rangle\ge0$ $\forall u\in V$:
2) סימטריות: $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$ $\forall u,v\in V$:
3) לינאריות: $\langle au+bv,w\rangle=a\langle u,w\rangle+b\langle v,w\rangle$ $\forall a,b\in\mathbb{R},\forall u,v,w\in V$:

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ נקרא נורמה, אם:
1) אי שליליות: $\|v\|\ge0$ $\forall v\in V$, $v=0\Leftrightarrow\|v\|=0$ $\forall v\in V$:
2) הומוגניות: $\|cv\|=|c|\cdot\|v\|$ $\forall c\in\mathbb{R},v\in V$:
3) אי שוויון המשולש: $\|u+v\|\le\|v\|+\|u\|$ $\forall u,v\in V$:



הערה: כל מרחב מכפלה פנימית $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ הוא מרחב נורמי $(V,\|\|)$
כאשר הנורמה מוגדרת $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

הגדרה: תהי X קבוצה לא ריקה. פונקציה $d:X\times X\to\mathbb{R}$ נקראת מטריקה, אם:
1) אי שליליות: $x=y\Leftrightarrow d(x,y)=0$, $d(x,y)\ge0$ $\forall x,y\in X$
2) סימטריות: $d(x,y)=d(y,x)$ $\forall x,y\in X$
3) אי שוויון המשולש: $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ $\forall x,y,z\in X$



הערה: מרחב וקטורי עם נורמה נקרא מרחב נורמי. מרחב וקטורי עם מטריקה נקרא מרחב מטרי

הרצאה 2 - כדורים וקבוצות

הערה: $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי הוא מרחב מטרי עם מצדירים $d(x,y)=\|x-y\|$.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי, יהי $r>0$, יהי $x\in X$ נקודה. הקבוצה $B(x,r)$ זה בעצם אוסף כל הנקודות ב-X עם מרחק קטן מ-r מהנקודה x.
באופן פורמלי: $B_r(x)=B(x,r)=\{y\in X \mid d(x,y)<r\}$
$B(x,r)$ נקרא **הכדור הפתוח** ברדיוס r סביב x.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי, יהי $r>0$, יהי $x\in X$ נקודה. הקבוצה $\overline{B(x,r)}$ זה אוסף כל הנקודות ב-X עם מרחק קטן שווה מ-r מהנקודה x.
באופן פורמלי: $\overline{B_r(x)}=\overline{B(x,r)}=\{y\in X \mid d(x,y)\le r\}$
$\overline{B(x,r)}$ נקרא **הכדור הסגור** ברדיוס r סביב x. (בעצם כולל גם את נק' השפה!)

הגדרה: (X,d) מרחב מטרי. תהי $S\subset X$ תת קבוצה.
S נקראת **קבוצה פתוחה** אם $\forall x\in S,\ \exists r>0 : B(x,r)\subset S$

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי. כל כדור פתוח $B(x,r)$ הוא בפני עצמו קבוצה פתוחה.

הגדרה: (X,d) מרחב מטרי. תהי $S\subset X$ תת קבוצה. S נקראת **קבוצה סגורה**
אם $S^c=X\setminus S$ זו קבוצה פתוחה (קבוצה היא סגורה אם המשלים שלה קבוצה פתוחה)

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי. כל כדור סגור $\overline{B(x,r)}$ הוא בפני עצמו קבוצה סגורה.

הרצאה 3 סוגי נקודות

הגדרה: תהי $S\subset X$ קבוצה. (X,d) מרחב מטרי.

1) $x\in S$ נקרא **נקודה פנימית של S** אם קיים $r>0$ כך ש $B(x,r)\subset S$
את אוסף הנקודות הפנימיות של S נסמן ב $\mathring{S}$, ונקרא הפנים של S.

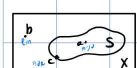
2) $y\in S^c$ נקרא **נקודה חיצונית של S** אם y פנימי ב S^c,
כלומר קיים $r>0$ כך ש $B(y,r)\subset S^c$.

3) $x\in X$ נקרא **נק' שפה של S** אם כל סביבה של X מכילה נק' מ-S ונק' מ-S^c. סימון: ∂S

4) $x\in S$ נקרא **נקודה בודדת של S** אם קיים סביבה של X שאינה מכילה אף נקודה אחרת מ-S פרט ל-X עצמו.

5) $x\in X$ נקרא **נקודת הצטברות של S** אם כל סביבה של X מכילה נק' (או נקודות) של S חוץ מ-X עצמו. נשים לב: X יכול להשתייך ל-S או ל-S^c. סימון S'

למה: תהי (X,d) מרחב מטרי. תהא $S\subset X$ תת קבוצה. אזי כל נקודה ב-X שייכת ל: $(\mathring{S})$ או ל $(\mathring{S^c})$ או ל (∂S), כלומר כל נק' היא נק' פנים או נק' חוץ או נק' שפה.
כמו כן, נשים לב שמתקיים $X=(\mathring{S})\cup(\mathring{S^c})\cup(\partial S)$, וזהו איחוד זר.



משפט: S פתוחה $\longleftrightarrow$ כל נק' ב-S היא נק' פנימית $\longleftrightarrow$ אין ב-S נק' שפה של S.

משפט: 1) איחוד של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
2) חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה
3) כל קבוצה פתוחה $S\subset X$ היא איחוד של כדורים פתוחים מהצורה $B(x,r)$

משפט: S סגורה $\longleftrightarrow$ S מכילה את כל נק' השפה שלה $\longleftrightarrow$ S מכילה את כל נק' ההצטברות שלה.

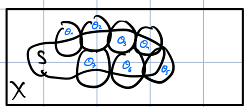
משפט: 1) חיתוך של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
2) איחוד סופי של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה

טענה: תהי (X,d) מרחב מטרי. תהי $S\subset X$ קבוצה. נקודה $x\in S^c$ היא נקודת שפה של S $\longleftrightarrow$ X היא נקודת הצטברות של S (זה לא אומר שנקודות שפה צריכות להיות הצטברות)

הגדרה: תהי (X,d) מרחב מטרי. תהי $S\subset X$ קבוצה כלשהי. **הסגור של S** היא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר ב-X שמכילה את S. נסמן את הסגור של S: $\bar{S}$

משפט: (X,d) מרחב מטרי. $S\subset X$ קבוצה אזי: $S\cup\partial S = S\cup S' = \bar{S}$

כלומר הסגור של S שווה לאיחוד של S עם נק' השפה של S ושווה לאיחוד של S עם נק' ההצטברות של S.



הרצאה 4 קומפקטיות

הגדרה: תהי $S\subset X$ קבוצה. כיסוי פתוח של S הוא $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כאשר I זו קבוצת אינדקסים. וכל O_α זו קבוצה פתוחה ב-X כך ש: $S\subset\bigcup_{\alpha\in I}O_\alpha$

הגדרה: קבוצה $S\subset X$ נקראת קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של S יש תת כיסוי סופי, כלומר יש תת אוסף $O_{\alpha_1},O_{\alpha_2},\dots,O_{\alpha_n}$ כך ש $S\subset\bigcup_{i=1}^{n}O_{\alpha_i}$

משפט: אם $S\subset X$ תת קבוצה קומפקטית, אזי S היא קבוצה סגורה.

הגדרה: $S\subset X$ זו קבוצה חסומה אם קיים $x\in X$, $r>0$, כך ש $S\subset B(x,r)$

הקוטר של S הוא $k(S)=\sup_{x,y\in S}\{d(x,y)\}$

משפט: תהי $S\subset X$ תת קבוצה קומפקטית, אזי S חסומה.

מסקנה: כל קבוצה קומפקטית היא סגורה וחסומה.

הערה: כל קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}^n$ היא קומפקטית (לא נכון לכל X, רק $X=\mathbb{R}^n$).

משפט: תהי $S\subset X$ קבוצה קומפקטית. תהי $F\subset S$ תת קבוצה סגורה. אזי F קומפקטית.

הגדרה: יהי $n\geq 1$. תיבה סגורה ב-$\mathbb{R}^n$ היא מכפלה קרטזית של n קטעים סגורים ב-$\mathbb{R}$.
$T=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_k\le x_i\le b_k\}$

משפט: הלמה של קנטור לתיבות: תהי $\{T_m\}$ סדרה של תיבות סגורות ב-$\mathbb{R}^n$, כך ש $T_1\supset T_2\supset T_3\supset\dots\supset T_m\supset\dots$ (סדרה מונוטונית) וגם הקוטר $\lim_{m\to\infty}k(T_m)=0$
אזי החיתוך של $\bigcap T_i$ היא נק' אחת בלבד.

משפט: תהי T תיבה סגורה ב-$\mathbb{R}^n$, אזי T קומפקטית.

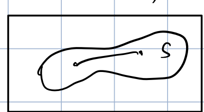
הרצאה 5 - קומפקטיות

משפט היינה בורל: תהי $S\subseteq\mathbb{R}^n$. S קומפקטית $\longleftrightarrow$ S סגורה וחסומה.

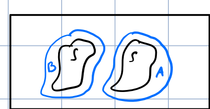
משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי. תהי $S\subseteq X$ קבוצה קומפקטית ב-X. אזי אם $F\subset S$ היא תת קבוצה אינסופית, ל-F יש נקודת הצטברות ב-S.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. תהי $S\subseteq X$, אזי **פירוק מפריד S** הוא 2 קבוצות פתוחות $A,B\subset X$ כך ש $A\cap B=\emptyset$, וגם $A\cap S\neq\emptyset$, $B\cap S\neq\emptyset$ וגם $B\subset A\cup B$.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. תהי $S\subseteq X$. אם קיים פירוק מפריד S, נאמר ש S אינה קבוצה קשירה. אחרת, נאמר ש-S היא קבוצה קשירה.



ש קשירה

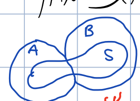


שלא קשירה

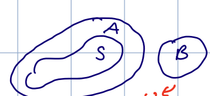
הרצאה 6 - קשירות וקשירות מסילתית

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. תהי $S\subset X$ תת קבוצה. **S קשירה** אם לכל 2 קבוצות פתוחות $A,B\subset X$, $A\cap B=\emptyset$ וגם $S\subset A\cup B$ מתקיים $S\subset A$ או $S\subset B$.

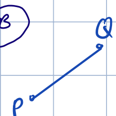
"הדרך היחידה לכסות קבוצה קשירה ב-2 קבוצות פתוחות וזרות היא כאשר S מוכלת באחת מהן"



שלא קיים



שכן קיים



הגדרה: הקטע בין P ל-Q הוא אוסף הנקודות X_t:

$$\overline{PQ}=\{X_t=P+t(Q-P)\mid 0\le t\le 1\}$$

הגדרה: הגדרה הפרמטרית של קטע ב-$\mathbb{R}^n$:

$$P=(P_1,P_2,\dots,P_n)$$
$$Q=(q_1,q_2,\dots,q_n)$$

$$x_1=P_1+t(q_1-P_1)$$
$$x_2=P_2+t(q_2-P_2)$$
$$\vdots$$
$$x_n=P_n+t(q_n-P_n)$$

משפט: יהיו $P,Q\in\mathbb{R}^n$, הקטע $\overline{PQ}$ הוא קבוצה קשירה.

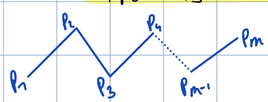
הערה: במקום קטע $X_t:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ ניתן להסתכל על פונקציה רציפה $\gamma_t:[0,1]\to\mathbb{R}^n$

מסקנה: כל מסילה ב-$\mathbb{R}^n$ היא קשירה.

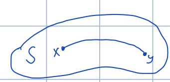
שזו מסילה

משפט: נניח ש $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ אוסף של קבוצות קשירות במרחב מטרי (X,d)
ונניח כי $\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha \neq \emptyset$ אזי $S=\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ היא קבוצה קשירה.

הגדרה: יהיו $P_1,P_2,\dots,P_m\in\mathbb{R}^n$ נקודות שונות. הקו הפוליגונלי $\overline{P_1P_2\dots P_3}$
הוא אוסף הקטעים P_iP_{i+1} עבור $i=1,2,\dots,m-1$.



טענה: הקו הפוליגונלי היא קבוצה קשירה.



הגדרה: קבוצה S נקראת קשירה מסילתית
אם לכל $x,y\in S$ קיימת מסילה $\gamma_t:[0,1]\to S$ כך ש $\gamma_0=x,\ \gamma_1=y$.

משפט: כל קבוצה S שהיא קשירה מסילתית היא בפרט קשירה.

הרצאה 7 סדרות

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$ מתכנסת לגבול $x\in X$
ונכתוב, $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ אם $\lim_{n\to\infty} d(x,x_n)=0$

משפט:
1) הגבול של סדרה $\{x_n\}$ הוא יחיד. (אם הוא קיים)
2) הסדרה הקבועה $x_n=x$ מתכנסת ל-x.
3) אם $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ ו $\lim_{n\to\infty} y_n=y$ $\Leftarrow$ $\lim d(x_n,y_n)=d(x,y)$

משפט: יהי $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי, ונניח ש $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ $\lim_{n\to\infty} y_n=y$
ו $c\in\mathbb{R}$ אזי מתקיים ש:
1) $x_n+y_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x+y$
2) $cx_n\xrightarrow[n\to\infty]{} cx$
3) $\|x_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}\|x\|$

(ההפך לא נכון: אם $\|x_n\|\to\|x\|$ לא בהכרח $\lim_{n\to\infty} x_n\to x$)

משפט: עבור $X=\mathbb{R}^n$ עם הנורמה האוקלידית $\left(\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$. יהיו
$x^m=(x_1^m,x_2^m,x_3^m,\dots,x_n^m)$ ו $y^m=(y_1^m,y_2^m,\dots,y_n^m)$ 2 סדרות ב-$\mathbb{R}^n$.
אזי אם $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$
1) $\lim_{m\to\infty} x^m=x \longleftrightarrow \lim_{m\to\infty} x_k^m=x_k \quad \forall 1\le k\le n$
2) אם $x^m\xrightarrow[m\to\infty]{} x$ $y^m\xrightarrow[m\to\infty]{} y$ אזי $x^m\cdot y^m\to xy$.

הגדרה: יהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי X. אם $\{n_k\}$ זו סדרה עולה ממש של מספרים שלמים חיוביים, נאמר ש $\{x_{n_k}\}$ היא תת סדרה של $\{x_n\}$.

משפט: אם $\lim x_n=x$, $\{x_n\}$ סדרה שמתכנסת ל-X, אזי כל תת סדרה של x_n גם כן מתכנסת ל-X.

משפט: תהי $S\subset X$ תת קבוצה קומפקטית. תהי $\{x_n\}\subset S$ סדרה. יש ל $\{x_n\}$ תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ מתכנסת.

משפט (משפט בולצאנו ויירשטראס) - תהי $\{x_n\}$ סדרה חסומה ב $\mathbb{R}^n$. יש ל $\{x_n\}$ תת סדרה מתכנסת.

סדרות קושי - יהי (X,d) מרחב מטרי, תהי $\{x_n\}\subset X$ סדרה. נאמר שהסדרה $\{x_n\}$ מקיימת את תנאי קושי אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שעבור $n,m>N$ מתקיים ש: $d(x_n,x_m)<\varepsilon$

משפט: תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-X. אזי $\{x_n\}$ מקיים את תנאי קושי!

הערה: סדרה שמקיימת את תנאי קושי נקראת סדרת קושי.

הערה: לא כל סדרת קושי במרחב מטרי X מתכנסת ב-X.

הגדרה: מרחב מטרי X נקרא מרחב מטרי שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת לגבול ב-X.

משפט: תהי X מרחב מטרי.
1) כל סדרת קושי היא חסומה.
2) אם לסדרת קושי $\{x_n\}$ יש תת סדרה מתכנסת $\{x_{n_k}\}\xrightarrow[k\to\infty]{}x$ אזי הסדרה עצמה מתכנסת ל-X, כלומר $\lim_{n\to\infty}x_n=x$

הרצאה 8 רביעי

הגדרה פונקציה: יהיו (X,d) (Y,d) מרחבים מטריים. תהי $E\subset X$ תת קבוצה של X.
נסתכל בפונקציה $f:E\to Y$. התחום של f הוא E, הטווח הוא Y.
אם $F\subset E$, אזי $f_{|F}:F\to Y$ (נקרא f מצומצם ל F) זו הפונקציה כך ש $f_{|F}(x)=f(x)$ $\forall x\in F$
וזו נקראת הצמצום של f ל F.

הגדרה גבולית: תהי $f: E \to Y$, יהי $p \in E$. נאמר ש $\lim_{x\to p} f(x) = q \in Y$ אם לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך ש $0<d(x,p)<\delta \Rightarrow d(f(x),q)<\varepsilon$.

משפט 1: נניח ש $f: E\to Y$ פונקציה, ו $p\in X$ נקודת הצטברות של E, התנאים הבאים שקולים:

א) $\lim_{x\to p} f(x) = q\in Y$

ב) לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$, כך $x_n\neq p$, מק"ים שאם $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ אז $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = q\in Y$

ג) לכל תת קבוצה $H\subseteq E$ כך ש p נקודת הצטברות של H, $\lim_{x\to p} f|_H(x) = q\in Y$

משפט 2: אריתמטיקה של גבולות: (X,d), (Y,d) מרחבים מטריים $E\subseteq X$ תת קבוצה. יהיו $g,f: E\to Y$ פונקציות. $p\in X$ נק' הצטברות של E. נניח שעבור $c\in\mathbb{R}$ ועבור $\lim_{x\to p} f(x) = l\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to p} g(x) = m\in\mathbb{R}$ אזי נקבל ש:

א) $\lim_{x\to p}(f(x)\pm g(x)) = l\pm m$ (גבול שווה לסכום הפרש של הגבולות)

ב) $\lim_{x\to p} cf(x) = cl$, $(=c\lim_{x\to p} f(x))$

ג) $\lim_{x\to p} f(x)\cdot g(x) = l\cdot m$

ד) אם $m\neq 0$, $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

(זו הכללה של תכונות של גבולות שראינו כבר באינפי 1. ההוכחות דומות מאוד למה שראינו באינפי 1, ולכן לא נעבור כאן שוב)

משפט 3: משפט הסנדוויץ': (עם אותן הנחות כמו במשפט 2) אם יש סביבה של p כך ש: $f(x)\le h(x)\le g(x)$, ובנוסף, $f,g,h: E\to\mathbb{R}$ מקיימים ש:

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to p} h(x) = L$$

מסקנה: ממשפט 2 ו-3 ניתן להסיק:

1) $\lim_{x\to p} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to p}|f(x)| = 0$

2) $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$ לכן הכיוון $\rightarrow$ מתקיים. בכיוון השני זה נובע מההגדרה, כי $|f(x)| = d(f(x),0)$.

3) אם $\lim_{x\to p} f(x)=0$ ואם $g(x)$ חסומה בסביבה של p אזי $\lim_{x\to p} f(x)\cdot g(x) = 0$

הגדרה, רציפות של פונקציות: יהיו (Y,d_Y), (X,d_X) שני מרחבים מטריים, ו $E\subset X$ תת קבוצה. נאמר ש $f: E\to Y$ רציפה בנק' p, $p\in E$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $x\in E$ מקיים $d(x,p)<\delta$ אזי $d(f(x),f(p))<\varepsilon$.

הערה: אם p נקודת גבול ב-E ההגדרה של רציפות שקולה לתנאי ש $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

משפט 1: הרכבה של שתי פונקציות רציפות היא רציפה. נשמור: יהי X,Y,Z מרחבים מטריים
נניח $f:E\to Y$ רציפה ב-p, עבור $E\subset X$ תת קבוצה. $g:f(E)\to Z$ רציפה ב-p.
($f(E)$=התמונה של f, כלומר $f(E)=\{f(x)\mid x\in E\}$) אזי הרכבה $g\circ f:E\to Z$ רציפה ב-p.

משפט 2: נסמן במרחבים ב-$\mathbb{R}^n$, לכל $1\le k\le n$ הפונקציה $P_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י
$P_k(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=x_k$, p_k נקראת פונקציית ההטלה על הציר ה-k-י ב-$\mathbb{R}^n$.
אזי לכל $1\le k\le n$ p_k היא פונקציה רציפה

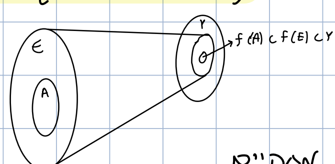
הרצאה 9 רציפות

הגדרה: f רציפה בנקודה $p\in E$ (כאשר p נק' הצטברות של E) אם הגבול $\lim_{x\to p}f(x)=f(p)$

משפט 4: תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ פונקציה. נסמן $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)$ כאשר $f_k=P_k\circ f$ עבור $1\le k\le n$.
אזי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ היא רציפה $\longleftrightarrow$ לכל $1\le k\le m$, $f_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ היא פונקציה רציפה.

הגדרה: 1) יהי $A\subseteq E$ תת קבוצה. התמונה של A היא תת קבוצה של Y,
ומסמנים $f(A)=\{f(x)\in Y\mid x\in A\}$

2) אם $B\subset Y$, המקור של B תחת f (ה"ו) $f^{-1}(B)=\{x\in E\mid f(x)\in B\}$
אומרים גם "התמונה ההפוכה" של B"



טענה 1: יהיו $S_\alpha\subset Y$, עבור $\alpha\in I$, אזי אם $S\subset Y$ מתקיים
א) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in I}S_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}f^{-1}(S_\alpha)$ ב) $f^{-1}(S^c)=f^{-1}(S)^c$
ג) $\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(S_\alpha)=f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in A}S_\alpha)$

הערה: אם f חח"ע $S=f^{-1}(f(S))$
אם f על $S=f(f^{-1}(S))$

טענה 2: $f(\bigcup_{\alpha\in I}S_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}f(S_\alpha)$

טענה 3: א) אם $S\subset X$ $S\subset f^{-1}(f(S))$ ב) $S\subset Y$, $f(f^{-1}(S))\subset S$

משפט 4: יהי X ו-Y מרחבים מטריים, תהי $E\subset X$ תת קבוצה, ותהי f פונקציה
$f:E\to Y$. f רציפה על E $\longleftrightarrow$ לכל קבוצה פתוחה θ ב-Y הקבוצה $f^{-1}(\theta)$ פתוחה ב-E.
(משפט 4 הוא תנאי 3 לרציפות של f על E. ($f^{-1}(\theta)=\{x\in E\mid f(x)\in\theta\}$)

הרצאה 10 רציפות

משפט 4: (תנאי חדש עבור רציפות): יהיו (X,d), (Y,d) מרחבים מטריים. תהי $f:X\to Y$ פונקציה.
אזי f רציפה על X (רציפה לכל $p\in X$) $\longleftrightarrow$ לכל $O\subseteq Y$ קבוצה פתוחה, $f^{-1}(O)\subseteq X$ פתוחה ב-X.

מסקנה: פונקציה רציפה מאופיינת בכך שהתמונה ההפוכה של קבוצה פתוחה היא פתוחה.

מסקנה: $f:X\to Y$ היא רציפה $\longleftrightarrow$ לכל $K\subset Y$ קבוצה סגורה, $f^{-1}(K)$ היא קבוצה סגורה.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. יהיו $T\subset E\subset X$. אזי נאמר ש-T פתוחה יחסית ל-E אם היא פתוחה במרחב המטרי (E,d) כאשר d מושרית מ-X ל-E.

משפט 5: יהי (X,d) מרחב מטרי. נניח ש-$E\subset X$ תת קבוצה. אזי $(E, d_{|E\times E})$ הוא מרחב מטרי בפני עצמו. אזי: $T\subset E$ פתוחה יחסית ל-E $\longleftrightarrow$ קיימת קבוצה פתוחה $A\subset X$ כך ש-$T=A\cap E$.

הגדרה: T נקראת סגורה יחסית ל-E (או "סגורה ב-E") אם קיימת K סגורה ב-X כך ש-$T=K\cap E$.

מסקנה 1: נובע מהגדרה שלהלן שקבוצה T סגורה יחסית ב-E $\longleftrightarrow$ $E\setminus T$ (המשלים של T ב-E) פתוחה יחסית ב-E.

מסקנה 2: אם $T\subset E\subset X$, ו-E קבוצה פתוחה ב-X, אזי T פתוחה יחסית ל-E $\longleftrightarrow$ T פתוחה בכל X.

משפט 6: תהי $f:X\to Y$ רציפה, אזי לכל $E\subset X$ תת קבוצה קומפקטית $f(E)$ תת קב' קומפקטית ב-Y.

מסקנה 1: משפט 6 גם נכון עבור $f:T\to Y$. כלומר:
כאשר $T\subset X$ הוא תת קבוצה, אם $E\subset T$ קומפקטית אז $f(E)\subset Y$ קומפקטית. (ממש אותה הוכחה)

מסקנה 2: אם $Y=\mathbb{R}$, ו-$E\subset X$, E קומפקטית. תהי $f:E\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי $f(E)$ חסומה ב-$\mathbb{R}$.

מסקנה 3: המשפט השני של ויירשטראס:
תהי $E\subset X$ קומפקטית, $f:E\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי f מקבלת את המינימום והמקסימום שלה ב-$\mathbb{R}$.

הרצאה 11 - רציפות

הגדרה: $f: X \to Y$ <u>רציפה במידה שווה</u> בכל X אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך ש:
$d(x,y) < \delta \Leftarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ לכל $x,y \in X$.

משפט 8: תהי $E \subset X$ קבוצה קומפקטית, ותהי $f: E \to Y$ פונקציה רציפה על E (נאמר f רציפה בכל נק' של E) אזי f רציפה במידה שווה.

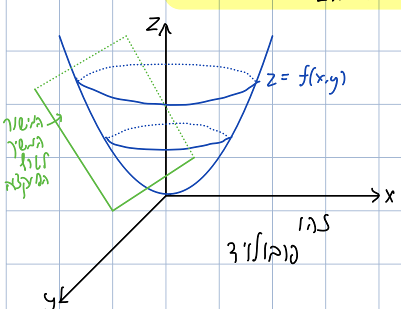
משפט 9: תהי $f: X \to Y$ פונקציה <u>רציפה</u>, ותהי $E \subset X$ <u>קשירה</u>, אזי <u>$f(E)$ קשירה</u>.

הגדרה: <u>מסילה</u> מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}^n$ היא פונקציה רציפה $f: I \to \mathbb{R}^n$ עבור קטע $I \subset \mathbb{R}$.

מסקנה: התמונה של מסילה ב-$\mathbb{R}^n$ היא קבוצה קשירה, כי קטע הוא קבוצה קשירה.

מסקנה: (משפט ערך הביניים) יהי (X,d) מרחב מטרי, תהי $f: X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח ש-$E \subset X$ היא קבוצה קשירה. נניח ש-$a,b \in f(E) \subset \mathbb{R}$, $a < b$. אזי לכל $a < c < b$ קיים $x \in E$ כך ש: $f(x) = c$.

הגדרה: תהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה של 2 משתנים. נסתכל בנק' (x_0,y_0). <u>הנגזרת החלקית</u> לפי x בנק' (x_0,y_0) מוגדרת להיות
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$



הגדרה: כנ"ל <u>הנגזרת החלקית של f לפי y</u> בנק' (x_0,y_0) מוגדרת להיות
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

משפט 1: תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת ב-x_0. אזי f גזירה ב-x_0 $\Leftrightarrow$ קיים $A \in \mathbb{R}$ ופונקציה $\varepsilon(\Delta x)$, עבור Δx קטן, כך ש $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta(x)} = 0$, ומקיימים ש
$$* \quad f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + \varepsilon(\Delta x)$$
ε נקראת פונקציית השגיאה.

הגדרה: תהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה של (x_0,y_0). נאמר ש-f <u>גזירה</u> או <u>דיפרנציאבילית</u> ב-(x_0,y_0) אם קיימים $A,B \in \mathbb{R}$ ופונקציה $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ עבור $\Delta x, \Delta y$ קטנים, כך שמתקיים
$$* \quad f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$
כך ש:
$$\lim_{(\Delta x,\Delta y) \to (0,0)} \frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

הרצאה 12 גזירות

הגדרה: תהי $f:E\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה של $(x_0,y_0)\in E$. נאמר שf גזירה או דיפרנציאבילית ב (x_0,y_0) אם קיימים $A,B\in\mathbb{R}$, $\varepsilon(\Delta x,\Delta y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה של $(0,0)$ כך ש:

$$* \; f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y) \quad , \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

מסקנה: קיום הנגזרות החלקיות ב (x_0,y_0) לא מעידות/מספיקות ש f רציפה בנקודה הזו!!

משפט 2: נניח ש $f(x,y)$ פונקציה מוגדרת בסביבה של (x_0,y_0) ודיפרנציאבילית בנק' (x_0,y_0), אזי:

א) f רציפה ב (x_0,y_0)

ב) f_x,f_y הנגזרות החלקיות קיימות ב (x_0,y_0) ו- $A=f_x(x_0,y_0)$, $B=f_y(x_0,y_0)$.

משפט 3 - נניח ש $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה של (x_0,y_0), ובסביבה הזו הנגזרות החלקיות קיימות $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$. בנוסף, נניח ש f_x , f_y רציפות ב- (x_0,y_0).
אם הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות ב (x_0,y_0) אזי f דיפרנציאבילית ב (x_0,y_0).

הערה: ההפך של משפט 3 אינו נכון! פונקציה יכולה להיות גזירה ב (x_0,y_0) אפילו אם הנגזרות החלקיות אינן רציפות שמה. נציג דוג':

הרצאה 13 נגזרות

הגדרה: תהי f פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, מוגדרת בסביבה של (x_0,y_0) במישור $\mathbb{R}^2$.
יהי $u=(a,b)$ וקטור יחידה (וקטור יחידה הוא וקטור מאורך 1. כלומר: $a^2+b^2=1$)
הנגזרת הכיוונית של f בכיוון u ב (x_0,y_0) מוגדרת להיות:

$$D_uf(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+ta, y_0+tb)-f(x_0,y_0)}{t}$$

הערה: אם $u=(1,0)$ מתקיים ש $D_{(1,0)}f=\frac{\partial f}{\partial x}$, ואם $u=(0,1)$ אז $D_{(0,1)}f=\frac{\partial f}{\partial y}$

הערה: D_uf מודד את השינוי של f בכיוון u בנק' (x_0,y_0).

משפט 4: תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה E של (x_0,y_0), f דיפרנציאבילית ב (x_0,y_0).
אזי לכל וקטור יחידה $u=(a,b)$ מתקיים שהנגזרת הכיוונית $D_uf(x_0,y_0)$ קיימת, ולכן:

$$D_uf(x_0,y_0)=a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

הערה: בינתיים הרחבנו את מושג הגזירות. $f:E\to\mathbb{R}$, E סביבה של (x_0,y_0)

ל-f יש נגזרות חלקיות קיימות בסביבה של (x_0,y_0) ורציפות ב (x_0,y_0)

← f דיפרנציאבילית ב (x_0,y_0)

← הנגזרות הכיווניות של f קיימות בכל כיוון $u=(a,b)$ וקטור יחידה. כולל את הנגזרות החלקיות.

הגדרה: נניח ש $f:E\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה E של (x_0,y_0), והנגזרות החלקיות של f קיימות ב (x_0,y_0) אז הוקטור $\nabla f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)=\left(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\right)$ נקרא <u>הגרדיאנט של f</u> ב-(x_0,y_0).

הערה: לכל u וקטור יחידה ב $\mathbb{R}^2$, $D_uf=\nabla f\cdot u=a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}$ = הנגזרת הכיוונית בכיוון u.

בנוסף, $\nabla f\cdot u=\|\nabla f\|\,\|u\|\cos\theta=\|\nabla f\|\cdot\cos\theta$ ← נובע ש $-\|\nabla f\|\le\nabla f\cdot u\le\|\nabla f\|$

<u>מסקנות:</u> 1) $D_uf=\nabla f\cdot u$ היא מקסימלית ושווה ל $\|\nabla f\|$ כאשר u בכיוון זהה ל ∇f.

2) $D_uf=\nabla f\cdot u$ היא מינימלית ושווה ל $-\|\nabla f\|$ כאשר u בכיוון ההפוך לכיוון של ∇f.

זה נכון כי כאשר $\theta=180^\circ$ אז $\cos\theta=-1$ ואז $\nabla f\cdot u=-\|\nabla f\|$, לכן *.

הגדרה: $f:E\to\mathbb{R}$ כאשר $E\subseteq\mathbb{R}^n$ היא סביבה של $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, f <u>נקראת דיפרנציאבילית</u> ב $x\in\mathbb{R}^n$

אם קיימים ה"ל $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך ש: $f(x+h)=f(x)+L(h)+\varepsilon(h)$

מסביבה של x כך ש: $\lim_{h\to0}\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}=0$ (זו הכללה ישירה של מה שראינו ב $\mathbb{R}^2$)

הערה: כל העתקה לינארית $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ היא מוגדרת ע"י $L(h)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\dots+A_n\Delta x_n$

כאשר $A_i=L(e_i)$, ו $\{e_i\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי. $L(h)=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i$

אם כך, אפשר להגדיר <u>דיפרנציאביליות</u> ע"י: $f(x+h)=f(x)+\sum A_i\Delta x_i+\varepsilon(h)$ *

כאשר $A_i\in\mathbb{R}$ $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ שמקיים $\lim_{\Delta x\to0}\frac{\varepsilon(\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n)}{\|(\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n)\|}=0$

$\Delta x=(\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n)$

<u>**הגדרה:**</u> 1) תהי $f:E\to\mathbb{R}$, כאשר $E\subset\mathbb{R}^n$ כך ש $x\in E$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ <u>הנגזרת החלקית של f לפי x_i</u>

היא: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_1,x_2,\dots,x_i+h,\dots,x_n)-f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\Delta x}$ (בקורדינטה ה-i נוסיף h ויתר הקורדינטות ללא שינוי)

2) אם $u=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ הוא וקטור יחידה, נגדיר את <u>הנגזרת הכיוונית של f</u> בכיוון u ע"י:

$$D_uf(x)=\lim_{t\to0}\frac{f(x_1+ta_1,x_2+ta_2,\dots,x_n+ta_n)-f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{t}$$ (סקלר = t)

<u>הערה:</u> נשים לב שעבור $u=\{e_j\}_{j=1}^{n}$ הבסיס הסטנדרטי ב $\mathbb{R}^n$ אז: $D_{e_i}f(x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

הגדרה: תהי $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ אז **הגרדיאנט של f ב-x** הוא:

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)\in\mathbb{R}^n$$

משפט 5: (עבור $n=2$ הוא זהה למשפטים 2 ו-4). נניח ש $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של $x\in E$
ו-f דיפרנציאבילית ב-x, אז: (1) f רציפה ב-x.
(2) לכל $1\le i\le n$ קיימת $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ ו $\frac{\partial f}{\partial x_i}=L(e_i)$
(3) לכל $u\in\mathbb{R}^n$ וקטור יחידה, הנגזרת הכיוונית של f בכיוון u קיימת ב-x
ומתקיים $D_uf(x)=\nabla f(x)\cdot u$

הרצאה 14 דיפרנציאביליות

משפט 6: נניח ש $f:E\to\mathbb{R}^n$ מוגדרת על סביבה E של x ($x\in\mathbb{R}^n$). והנגזרות החלקיות $\frac{Df}{Dx_i}$
קיימות ב-E ורציפות ב-x, אז f דיפרנציאבילית ב-x. כלומר קיימות $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
כך ש $f(x+h)=f(x)+L(h)+\varepsilon(h)$*, וגם $\lim_{h\to0}\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}=0$
(ההוכחה דומה למה שראינו עבור $\mathbb{R}^2$, ולכן לא נוכיח כאן שוב, זה הוכחה דומה).

הגדרה: תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה $E\subseteq\mathbb{R}^n$, $x\in E$. אם f דיפרנציאבילית ב-x, כך ש *
מתקיים (* ממשפט 6) אז ההעתקה $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נקראת הדיפרנציאל של f ב-x, ומסומן $df_{|x}=L$
(הדיפרנציאל מייצג את קצב השינוי של f בכיוון מסוים). כלומר הדיפרנציאל כפונקציה מודד את קצב השינוי
של f ב-x בכיוונים שונים ב-$\mathbb{R}^n$.

נשים לב: $df_{|x}(h)=L(h)=\nabla f(x)\cdot h$ = הדיפרנציאל. (טיעון דיפרנציאל זו הכללה שיפה של נגזרת)

$$L(h)=\sum_{k=1}^n A_k\Delta x_k \qquad \nabla f(x)\cdot h=\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k$$

כאשר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אז $df_{|x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $df_{|x}(h)=f'(x)\cdot h$

משפט 7: נניח ש $f,g:E\to\mathbb{R}$ גזירות ב $x\in E$. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ סקלרים. מתקיים ש:
א) $d(f+g)_{|x}=df_{|x}+dg_{|x}$ ב) $d(f\cdot g)_{|x}=f(x)dg_{|x}+g(x)df_{|x}$
ג) $d\left(\frac{f}{g}\right)_{|x}=\frac{g(x)df_{|x}-f(x)dg_{|x}}{g^2(x)}$ אם $g(x)\neq0$ (ממש כמו חוקי נגזרות רגילות שמכירים!)

מסקנה ממשפט 7: $\nabla(fg)=f\cdot\nabla(g)+g\cdot\nabla(f)$, $\nabla(af+bg)=a\cdot\nabla f+b\cdot\nabla g$

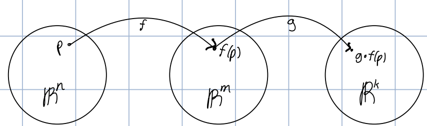
הגדרה: תהי $f:E\to\mathbb{R}^k$ מוגדרת בסביבה E של $x\in\mathbb{R}^n$. f **נקראת דיפרנציאבילית** ב-x
אם קיימת העתקה לינארית $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ כך ש:
$f(x+h)=f(x)+L(h)+\varepsilon(h)$* כאשר $x,h\in\mathbb{R}^n$, וגם $\lim_{h\to0_n}\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}=0_k$

משפט 8: תהי $f=(f_1,f_2,\dots,f_k):E\to\mathbb{R}^k$ המוגדרת על סביבה E של $x\in\mathbb{R}^n$.
נסמן ב-k ההטלים $P_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $1\le j\le k$ הנתונים על ידי $P_j(x_1,x_2,\dots,x_k)=x_j$
אז $f:E\to\mathbb{R}^k$ גזירה ב-$x\in E$ $\longleftrightarrow$ כל $f_j=P_j\circ f$ $1\le j\le k$ גזירה ב-x כפונקציה $f_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
בנוסף אם נסמן $df_{|x}=L$ אז $L=df_{|x}=(df_{1|x},\dots,df_{k|x})$ והוא הדיפרנציאל של f ב-x.
(הדיפרנציאל L הוא אוסף הדיפרנציאלים של כל פונקציה רכיב שהיא מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}$) (רכיב רכיב!)

הרצאה 15 - מטריצת יעקוביאן + דיפרנציאביות

הגדרה: 1. $Jf_{|x}$ נקראת מטריצת היעקוביאן של f ב-x.
2. כאשר $n=k$ זו מטריצה ריבועית, והדטרמיננטה שלה $|Jf_{|x}|$ נקראת היעקוביאן של f ב-x.

משפט 9: נניח ש $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$, f דיפרנציאבילית ב $p\in\mathbb{R}^n$, ו-g דיפרנציאבילית



ב $f(p)\in\mathbb{R}^m$. אז $g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית
ב $p\in\mathbb{R}^n$ ומתקיים $d(g\circ f)_{|p}=dg_{|f(p)}\circ df_{|p}$
נסמן $q=f(p)$.

מסקנה: $J(g\circ f)_{|p}=J(g)_{|q=f(p)}\cdot J(f)_{|p}$

הרצאה 16 נגזרות וטורי טיילור

משפט 1: נניח ש-f מוגדרת בסביבה של (x_0,y_0) וקיימות נגזרות חלקיות בסביבה עד סדר 2, $f_x,f_y,f_{xy},f_{yx},f_{xx},f_{yy}$ הן רציפות ב (x_0,y_0), אז $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

הגדרה: 1. תהי $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$. נגזרת חלקית מסדר k של פונקציה f, אם היא קיימת,
היא מהצורה: $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}=\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_{i_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}(f):\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ כאשר $1\le i_k\le d$.

הגדרה: תהי $D\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נגדיר $C(D)$ להיות אוסף הפונקציות $f:D\to\mathbb{R}$
שרציפות ב-D. בנוסף נגדיר $C^k(D)$ $(k\ge1)$ להיות כל הפונקציות הרציפות ב-D,
וכל הנגזרות החלקיות שלהם מסדר k קיימות ורציפות ב-D, כלומר קיימות ורציפות
עד סדר k. (נשים לב $C(D)\subset C^k(D)$ כמובן לפי ההגדרה).

מסקנה ממשפט 1: נניח ש-D קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$, ו-$f\in C^k(D)$ $(k\ge1)$
אז כל הנגזרות החלקיות עד סדר k של f לא תלויות בסדר הגזירה.

פיתוח טיילור עבור פונקציה $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, כאשר $f\in C^{n+1}(\mathbb{R}^d)$

תזכורת: על פיתוח טיילור עבור $d=1$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עם נגזרות רציפות עד סדר $n+1$.

$$* \quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

נציב כאן $x=x_0+h$ ואז $*$ הופך להיות נוח יותר:

$$** \quad f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

כאשר $0<\theta<1$.

הערה: עבור $n=0$ נקבל ש $**$ זהו משפט לגרנז'.

לפי הסימון הנ"ל נקבל ש $**$ כעת שווה ל:

$$** \quad f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}\longrightarrow g(t)=\sum_{m=0}^{n}\frac{g^{(m)}(0)}{m!}t^m+\frac{g^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}$$

h מוחלף ב-t
x_0 הוא 0

$0<\theta<1$

אז הביטוי הסופי לפיתוח טיילור מסדר m הוא:

$$\boxed{f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}D^m f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}$$

הרצאה 17 טורי טיילור ונקודות קיצון

פיתוח טיילור נותן מכפלת טיילור בהשמטה אחד יחד עם חסם השארית עבור פונקציות של כמה משתנים.

הכללה לפי נקודות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ שייך ל $C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$

כל הנגזרות החלקיות של f עד סדר $m+1$ קיימות ורציפות) אזי אם נגדיר:

$$D=h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}=(h\cdot\nabla)$$

$h=(h_1,h_2,\dots,h_n)$

$x^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$

מתקיים שעבור $x^0\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$f(x^0+h)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}D^k f(x^0)+\frac{1}{(m+1)!}D^{m+1}f(x^0+\theta h)$$

$0<\theta<1$

מסקנות ושימושים לפיתוח טיילור ב-$\mathbb{R}^n$:

1. אם נכתוב פיתוח טיילור מסדר 0 מקבלים: $f(x^0+h)=f(x^0)+\nabla f(x^0+\theta h)\cdot h$, $0<\theta<1$

משפט 1: תהי $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ אז עבור $x^0,y^0\in\mathbb{R}^n$, מתקיים ש $f(y^0)-f(x^0)=\nabla f(c)\cdot(y^0-x^0)$

עבור c נקודה בקטע שבין x^0 ל- y^0. c מהצורה $c=x^0+\theta(y^0-x^0)$

2. נניח ש $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$

אם $\nabla f(x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}^n$ אז מתקיים ש- f היא פונקציה קבועה על $\mathbb{R}^n$.

הערה: אפשר להחליף את $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ב $f:E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ עבור E תחום שקשיר פוליגונלית ב-$\mathbb{R}^n$

אם $\nabla f(x)=0_n$ לכל $x\in E$ אז f קבוע ב-E

הגדרה: נניח ש $f:E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה של $x^0\in E$.

1. $x^0\in E$ היא נק' <u>מקסימום</u> מקומי ב-f אם קיימת סביבה S של x_0 כך שלכל $x\in S$ $f(x)\le f(x^0)$.
2. $x^0\in E$ היא <u>נק' מינימום</u> מקומי ב-f אם קיימת סביבה S של x_0 כך שלכל $x\in S$ $f(x^0)\le f(x)$

משפט 2: נניח $f:E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה E של x^0. נניח של-f יש מינימום או מקסימום מקומי ב x^0. אזי עבור כל $1\le k\le n$ אם $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ קיימת אזי $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)=0$.

הערה: תנאי שהנגזרות החלקיות מתאפסות בנק' מינימום/מקסימום מקומי (אם הנגזרות קיימות). אבל זה לא מספיק! לדוגמה בתמונה של האוכף בראש הדף. (תמונה 1) כלומר זה שהנגזרות החלקיות מתאפסות לא מבטיח לנו שיש מינימום/מקסימום מקומי!

הגדרה: $x^0\in\mathbb{R}^n$ נקראת <u>נקודה קריטית</u> אם $\nabla f(x^0)=0_n$ (כלומר אם כל הנגזרות החלקיות מתאפסות)
(לא כל נק' קריטית היא מינימום או מקסימום!)

הגדרה: נקודה קריטית שהיא <u>לא</u> מינימום או מקסימום מקומי נקראת <u>נקודת אוכף</u>.

משפט 3: נניח ש $f(x,y)$ ב $C^2(E)$ עבור סביבה E של (x_0,y_0), נניח ש $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ (כלומר (x_0,y_0) זו נקודה קריטית עבור f) אזי:

1) אם בנקודה (x_0,y_0) $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ ו- $f_{xx}>0$ אזי ל-f יש <u>מינימום</u> מקומי ב (x_0,y_0)
2) אם בנקודה (x_0,y_0) $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ ו- $f_{xx}<0$ אזי ל-f יש <u>מקסימום</u> מקומי ב (x_0,y_0)
3) אם $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$ אזי ל-f יש נק' <u>אוכף</u> ב (x_0,y_0)
3) אם בנקודה (x_0,y_0) $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$ אז <u>הכל אפשרי</u>. (נצטרך להסתכל בנגזרות מסדר 3 כדי לקבוע).

הגדרה: מטריצת ההסיאן של פונקציה f נתונה ע"י:

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

הרצאה 18 נק' קיצון + מטריצת הסיאן

מטריצת הסיאן כללי, עבור $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\quad f\in C^2(\mathbb{R}^n)$

$$H_f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \dots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \dots & \dots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \dots & \dots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

שימו לב, ההסיאן סימטרי כי: $f_{x_ix_j}=f_{x_jx_i}$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$$

הערה: ההסיאן מופיע בשארית בפיתוח טיילור מסדר 1.

(שארית טיילור) $\quad f(x^0+k)=f(x^0)+\overset{=0}{\nabla f(x^0)}\cdot k+\frac{1}{2}k^tH_fk(x^0+\theta k)\qquad 0<\theta<1$

1. בנקודה קריטית x^0, $\nabla f(x^0)=0$ ולכן ההתנהגות של הפונקציה נקבעת ע"י הביטוי עם ההסיאן.
2. ההסיאן היא מטריצה סימטרית.

הגדרה: תהי A מטריצה $n\times n$ סימטרית. נאמר ש-A:

א) חיובית אם לכל $k\neq 0$ $k\in\mathbb{R}^n$, $\quad k^tAk>0$

ב) שלילית אם לכל $k\neq 0$ $k\in\mathbb{R}^n$, $\quad k^tAk<0$

ג) מעורבת אם קיימים $k_1,k_2\in\mathbb{R}^n$ כך ש $k_1^tAk_1>0$ ו $k_2^tAk_2<0$.

ד) אם A לא מקיים את א, ב ו-ג אז A מטריצה שלא ניתן לקבוע.

משפט סילבסטר: תהי A מטריצה סימטרית.

אזי: A חיובית $\longleftrightarrow$ כל המינורים $M_1,M_2,\dots,M_n$ הם מספרים חיוביים.

כאשר
$$\boxed{M_k:=\det\begin{pmatrix}A_{11} & \dots & A_{1k}\\ A_{k1} & \dots & A_{kk}\end{pmatrix}}\qquad 1\le k\le n$$

מסקנה: A שלילית $\longleftrightarrow$ $-A$ חיובית $\longleftrightarrow$ מתקיים $(-1)^kM_k>0$ לכל $1\le k\le n$

משפט 4: מבחן הנגזרת השנייה: נניח ש $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת, $f\in C^2(E)$ בסביבה E של x^0. נניח שx^0 היא נק' קריטית עבור f, כלומר $\nabla f(x_0)=0_n$ ונסמן ב $H(x)$ ההסיאן של f ב $x\in E$. אזי:

1) אם $H(x^0)$ חיובית, אזי x^0 היא מינימום מקומי עבור f.

2) אם $H(x^0)$ שלילית, אזי x^0 הוא מקסימום מקומי עבור f.

3) אם $H(x^0)$ מעורבת, אזי x^0 היא נק' אוכף עבור f.

4) אם $H(x^0)$ לא ניתן לקבוע, אזי הכל אפשרי עבור x^0.

הרצאה 19 משפט הפונקציה ההפוכה

משפט הפונקציה ההפוכה

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ כך ש $f\in C^1$ בסביבה של $x_0\in\mathbb{R}^n$.
נניח כי $df|_{x_0}$ (מטריצת היעקוביאן של f ב x_0) היא הפיכה. אז: f מעתיקה סביבה S של x_0
באופן חח"ע ועל לסביבה T של $f(x_0)$, ו- $f^{-1}:T\to S$ שייך ל $C^1(T)$.
קיים לכל $x\in S$ כך ש $y=f(x)$ מתקיים ש: $df^{-1}|_y=(df|_x)^{-1}$ (בתרגול 10 ראינו את זה בצורה נוחה יותר מאשר הגוון שפה)

מתוך תרגול 10:

משפט הפונקציה ההפוכה: תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, ו $f:A\to\mathbb{R}^n$ פונקציה גזירה ברציפות. נניח שעבור $a\in A$
מטריצת יעקובי $J_f(a)$ הפיכה (או באופן שקול: $0\neq\det(J_f(a))$) אזי קיימת קבוצה פתוחה $a\in U\subseteq A$
כך ש $f(U)$ פתוחה, וגם $f:U\to f(U)$ חח"ע ועל ולכן f^{-1} קיימת וגזירה ברציפות וגם מתקיים ש:
$J_{f^{-1}}(y)=\left(J_f(f^{-1}(y))\right)^{-1}$, $y\in f(U)$

משפט נק' השבת: יהי (X,d) מרחב מטרי שלם. תהי $T:X\to X$ כיווץ. אזי קיימת ל-T נקודת שבת יחידה ב-X.

למה: נניח ש- $S\subset\mathbb{R}^n$ היא סביבה של x_0, $f\in C^1(S)$, $f:S\to\mathbb{R}^n$. נניח שב x_0 $df|_{x_0}=0$
אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $r>0$ כך שעבור $x_1,x_2\in B(x_0,r)$ מתקיים ש: $\|f(x_1)-f(x_2)\|<\varepsilon\|x_1-x_2\|$
כלומר, אם $df_{x_0}=0_{n\times n}$ אזי יש סביבה של x_0 שבה f היא כיווץ.

הרצאה 20 - משפט הפונקציה ההפוכה

משפט א: תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ שייך ל C^1 בסביבה של $x_0\in\mathbb{R}^n$. אם $df|_{x_0}$ הפיך
אזי קיימת סביבה S של x_0 כך ש f חח"ע ועל סביבה T של $y_0=f(x_0)$
קיים $f^{-1}:T\to S$ שייך ל $C^1(T)$. קיים לכל $x\in S$ כך ש $y=f(x)$, $df^{-1}|_y=(df|_x)^{-1}$

טענה 1: לכל $y\in\overline{B(0,\frac{r}{2})}$ קיים $x\in\overline{B(0,r)}$ יחיד כך ש $g(x)=y$.

טענה 2: $g^{-1}:T\to S$ היא פונקציה רציפה.

טענה 3: $g^{-1}:T\to S$ היא פונקציה דיפרנציאבילית.
בפרט, אם $x_1\in S$ ו $y_1=g(x_1)$ $[x_1=g^{-1}(y_1)]$ אזי $(dg^{-1})|_{y_1}=(dg|_{x_1})^{-1}$

טענה 4: $g\in C^1(T)$.

הרצאה 21 משפט הפונקציה הסתומה

משפט הפונקציה הסתומה: תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, ונסתכל במשוואה $F(x,y)=0$, אזי אם בנקודה (x_0,y_0)

כך ש $F(x_0,y_0)=0$ מתקיים: (1 $F\in C^1(\mathbb{R}^2)$ בסביבה של (x_0,y_0)

(2 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ (נגזרת לפי y שונה מ-0)

אזי יש סביבה S של (x_0,y_0) שבה המשוואה $F(x,y)=0$ קובעת את y כפונקציה של x.

מסקנה מהמשפט: כאשר y פונקציה של x בסביבה של (x_0,y_0) ניתן למצוא את הנגזרת של y בסביבה של (x_0,y_0) בעזרת כלל השרשרת. $F(x,y)=0$

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=F_x\frac{\partial x}{\partial x}+F_y\frac{\partial y}{\partial x}=0\to F_x+F_y\frac{\partial y}{\partial x}=0\to\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_y}\to$$ נכון כאשר y היא פונקציה של x

הערה: מהמקרה של המשפט, $(x,y(x))$ עבור $(x,y)\in S$ הוא "<u>קו רמה</u>" (או פתרון) למשוואה $F(x,y)=0$ סביב (x_0,y_0).
כלל שאפשר להחליף את $F(x,y)=0$ ב $F(x,y)=k$ לכל סקלר k, ונקבל את <u>קו רמה בגובה k</u> בעזרת משפט הפונקציה הסתומה.

משפט 3: (משפט הפונקציה הסתומה הכללי): תהי $F:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^s$, ונסתכל על המשוואה הוקטורית $F(\bar{x},\bar{y})=0_s$, כאשר $\bar{x}\in\mathbb{R}^k$, $\bar{y}\in\mathbb{R}^s$. אם מתקיים ש $F(\bar{x}^0,\bar{y}^0)=0_s$ עבור נק' מסוימת $(\bar{x}^0,\bar{y}^0)\in\mathbb{R}^{k+s}$, וגם (1 $F\in C^1$ בסביבה של (x^0,y^0)

(2 $\left|\frac{\partial(f_1,f_2,\dots,f_s)}{\partial(y_1,\dots,y_s)}\right|\neq 0$ (היעקוביאן ב $(\bar{x}^0,\bar{y}^0)$)

אזי יש סביבה S של $(\bar{x}^0,\bar{y}^0)$ ב $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s$ כך שהמשוואה $F(\bar{x},\bar{y})=0_s$ קובעת את $\bar{y}=\bar{y}(\bar{x})$
כלומר $y_1,\dots,y_s$ הם תלויים כפונקציה של $x_1,\dots,x_k$ בסביבה S.

<u>לסיכום:</u> $\nabla F|_{(x_0,y_0,z_0)}$ הוא ניצב למשטח הרמה $F(x,y,z)=0$.

הרצאה 22 - כופלי לגרנז'

משפט: יהי $h(x,y)=0$, $h\in C^1$ קו רמה ב $\mathbb{R}^2$. תהי $f(x,y)$ פונקציה מוגדרת על קו הרמה, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, אזי בנק' קיצון של f על קו הרמה $h(x,y)=0$ מתקיים $\nabla f=\lambda\nabla h$ <= <u>משוואת לגרנז'</u>
כאשר λ נקרא <u>כופל לגרנז'</u>

משפט: נניח ש $p=(x_0,y_0,z_0)$ היא נק' קיצון עבור f, תחת 2 אילוצים $h_1(x,y,z)=0$, $h_2(x,y,z)=0$
אזי אם $\nabla h_1(p)$, $\nabla h_2(p)$ הם בלתי תלויים לינארית אזי קיימים $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\nabla f(p)=\lambda\nabla h_1(p)+\mu\nabla h_2(p)$$

הרצאה 23 - אינטגרלים

תהי D קבוצה פתוחה וקשירה. נקרא ל-D "תחום".

הגדרה: חלוקה P של $\bar{D}$ היא איחוד סופי של תחומים סגורים $\{D_j\}_{j=1}^{n}$ כך ש (1 $\bar{D}=\bigcup_{j=1}^{n} D_j$, (2 $D_i\cap D_j=\phi \quad \forall i\neq j$

הגדרות: 1. תיבה T היא תת-קבוצה ב-$\mathbb{R}^n$ מהצורה $T=\{(x_1,x_2,\dots,x_n) \mid a_i\le x_i\le b_i,\ 1\le i\le n\}$

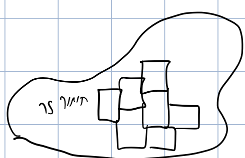
2. נפח של תיבה T, נסמן ב- $|T|$, וניתן לפי הנוסחה: $|T|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$

הגדרה: תהי S קבוצה סגורה.

1) נפח פנימי של S ניתן ע"י: $|S|_{int}=\sup_{\bigcup_{s=1}^{\infty} T_s\subseteq S}\sum_{s=1}^{\ell}|T_s|$

T_s תיבה, האיחוד זר: $T_i\cap T_j=\phi$

2) נפח חיצוני של S ניתן ע"י: $|S|_{ext}=\inf_{S\subseteq\bigcup_{s=1}^{\infty} T_s}\sum_{s=1}^{L}|T_s|$



הגדרה: במקרה ש $V=|S|_{ext}=|S|_{int}$ אומרים של-S יש נפח V ב-$\mathbb{R}^n$. מסמנים $|S|=V$

אינטגרלים: נניח D מסמן קבוצה סגורה וקשירה, עם נפח סופי V.

תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה (תמיד f היא חסומה!) תהי $P=\{D_j\}_{j=1}^{k}$ חלוקה של D.

(D_j חסום וסגור ולכן יש נפח, $D_i\cap D_j=\phi$, $\bigcup_{j=1}^{k}D_j=D$. נגדיר שני סכומים:

סכום דרבו עליון: $\bar{S}(f,P)=\sum_{j=1}^{k}M_j|D_j|$, $M_j=\sup_{x\in D_j}\{f(x)\}$

סכום דרבו תחתון: $\underline{S}(f,P)=\sum_{j=1}^{k}m_j|D_j|$, $m_j=\inf_{x\in D_j}\{f(x)\}$

הערה: אם מדובר בקבוצות קומפקטיות ניתן להשתמש ב $\max$ ו- $\min$ עבור M ו- m, כי f חסומה.

משפט 1: אם $f:D\to\mathbb{R}$ חסומה, $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in D$,
אז לכל חלוקה P של D: $m|D|\le\underline{S}(f,P)\le\bar{S}(f,P)\le M|D|$

הגדרות: 1. האינטגרל דרבו עליון של f על D מוגדר: $\overline{\int_D} f=\inf_{P\ \text{חלוקה של}\ D}\bar{S}(f,P)$

2. האינטגרל דרבו תחתון של f על D מוגדר: $\underline{\int_D} f=\sup_{P\ \text{חלוקה של}\ D}\underline{S}(f,P)$

הגדרה: תהי $f:D\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי f נקראת אינטגרבילית לפי דרבו אם $\overline{\int_D} f=\underline{\int_D} f$

במקרה זה נסמן $\overline{\int} f_D=\underline{\int_D} f=\int_D f$

הגדרה: תהי P חלוקה של D $\left(P=\{D_j\}_{j=1}^{k},\ D=\bigcup_{j=1}^{k} D_j,\ \forall_{i\neq j}\ D_j\cap D_i=\phi\right)$

הפרמטר של החלוקה מסומן $\lambda(p)$ ומוגדר ע"י $\lambda(p)=\max_{1\le j\le n} diam(D_j)$

כאשר $diam(D_j)$ זה הקוטר של הקבוצה D_j, זה המרחק הגדול ביותר בין 2 איברים בקבוצה.

$$diam(D)=\sup\{\|x-y\| \mid x,y\in D\}$$

הגדרה: תהי $P=\{D_j\}_{j=1}^{k}$ חלוקה של D. נאמר שחלוקה Q של D היא עידון של P

אם Q היא חלוקה של D שמתקבלת ע"י לקיחת חלוקה P_j לכל D_j.

$$D=\bigcup_{j=1}^{k} D_j=\bigcup_{j=1}^{k}\bigcup_{s=1}^{l_j} D_{j,s}$$ (כלומר עידון זה חלוקה של חלוקה!)

כאשר $P_j=\{D_{j,s}\}_{s=1}^{l_j}$ היא חלוקה של D_j.

משפט 2: תהי חלוקה Q עידון של חלוקה P של D. אזי:

$$\underline{S}(f,P)\le\underline{S}(f,Q)\le\overline{S}(f,Q)\le\overline{S}(f,P)$$

מסקנה: לכל 2 חלוקות P,R של D מתקיים ש $\underline{S}(f,P)\le\overline{S}(f,R)$

מסקנה 2: $\underline{\int_D} f\le\overline{\int_D} f$ (לא משנה לנו איזה חלוקה!! תמיד זה נכון, לכל חלוקה!)

משפט 3: תהי $f:D\to\mathbb{R}$ חסומה. f אינטגרבילית לפי דרבו על D $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$

קיימת חלוקה P של D שמקיימת $\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\varepsilon$

מסקנה: אם f אינטגרבילית לפי דרבו אם"ם לכל $\varepsilon>0$, קיימת חלוקה $R=\{D_j\}_{j=1}^{k}$ של D כך ש:

$\sum_{j=1}^{k}(M_j-m_j)|D_j|<\varepsilon$ כאשר $m_j=\sup_{x\in D_j}\{f(x)\}$, $M_j=\inf_{x\in D_j}\{f(x)\}$

משפט 4: תהי $D\subset\mathbb{R}^n$ תחום קומפקטי, תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי $\int_D f$ קיים.

מסקנה: הגדרה שימושית: $\text{האינטגרל}=\int_D f=\lim_{\lambda(P)\to0}\overline{S}(f,P)=\lim_{\lambda(P)\to0}\underline{S}(f,P)$ של f על D.

הגדרה: אינטגרל לפי רימן: תהי $P=\{D_j\}_{j=1}^{k}$ חלוקה של D, ו- $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

אזי סכום רימן של f לפי החלוקה P הוא סכום מהצורה $S=\sum_{j=1}^{k} f(x_j)\,|D_j|$ כאשר $x_j\in D_j$

ברור לפי ההגדרה ש- $\underline{S}(f,P)\le S\le \overline{S}(f,P)$

כלומר, סכום רימן הוא בין סכום דרבו תחתון לסכום דרבו עליון.

הגדרה: אומרים שפונקציה f היא אינטגרבילית לפי רימן ב-D אם קיים L כך ש: $\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)=L$

כלומר שהגבול קיים ולא תלוי בבחירת $x_j\in D_j$. נסמן $L=\int_D f_{(\text{רימן})}$

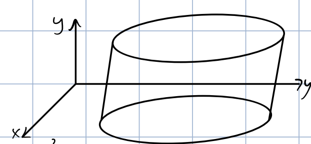
משפט 6: יהי D תחום קומפקטי בעל נפח ב-$\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי:

f אינטגרבילית לפי רימן $\longleftrightarrow$ f אינטגרבילית לפי דרבו. $\int_D f_{(\text{רימן})}=\int_D f_{(\text{דרבו})}$

הרצאה 24 - אינטגרלים

אם D קומפקטית, $f:D\to\mathbb{R}$ רציפה ולא שלילית

$\int_D f=$ נפח מתחת לגרף של הפונקציה f ב-$\mathbb{R}^n$



ב-$\mathbb{R}^3$, נפח גוף

P זו חלוקה של D ששואפת לאינסוף. $P=\{D_j\}_{i=1}^{N}$, $\int_D f=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,|D_j|$ ⟵ זו ההגדרה לפי רימן שראינו סמס שעבר

משפט 7: תכונות של האינטגרל: תהי D ב-$\mathbb{R}^n$ תחום קומפקטי בעל נפח. יהיו $f,g:D\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות ב-D (כלומר לפי רימן הגבול קיים), ויהי $c\in\mathbb{R}$ סקלר. אזי:

1) $f+cg$ אינטגרבילית על D.

2) אם לכל $x\in D$ $f(x)\ge g(x)$ $\longleftarrow$ $\int_D f\ge\int_D g$

3) אם $P=\bigcup_{j=1}^{N} D_j$ היא חלוקה של D לחלקים בעלי נפח, אז f אינטגרבילית על D, אזי f אינטגרבילית על כל D_j, $\int_D f=\sum_{j=1}^{N}\int_{D_j} f$

4) תהי $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in D$. אזי $m|D|\le\int_D f\le M|D|$

5) יהי $f(x)=1$ לכל $x\in D$ אזי $1\le f(x)\le 1$ ועובדה מ-4 ש $\int_D 1=|D|$ =נפח של D.

"האינטגרל של הפונקציה 1 הוא הנפח של התחום"

6) משפט ערך הביניים: תהי f רציפה על D, אזי קיים $x_0\in D$ כך ש $\int_D f=|D|\cdot f(x_0)$

7) תהי f אינטגרבילית על D. אזי $|f|$ אינטגרבילית על D ומתקיים $\left|\int_D f\right|\le\int_D |f|$

חלק 2 - איך מחשבים את האינטגרל:

תהי $R=[a,b]\times[c,d]$ מלבן.

הגדרה: אינטגרל חוזר על R הוא אינטגרל מהצורה $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$

משפט 8 - משפט פוביני: (ב $\mathbb{R}^2$). תהי $f(x,y)$ פונקציה אינטגרבילית לפי דרבו ורימן על מלבן $A=[a,b]\times[c,d]$. נניח כי $\forall x\in[a,b]$ האינטגרל $I_x=\int_c^d f(x,y)\,dy$ קיים.
אז $I(x)$ אינטגרבילי על $[a,b]$ ומתקיים

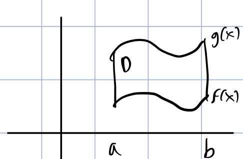
$$\underbrace{\int_A f(x,y)\,dxdy}_{\text{אינטגרל רימן!}} = \int_a^b I(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx}_{\text{אינטגרל חוזר!}}$$

וגם אינטגרל רימן שווה לאינטגרל החוזר.

מסקנות למשפט פוביני

1. ניתן להחליף את התפקידים של x ו-y. $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_A f$
2. ניתן להכליל את משפט פוביני למימדים גבוהים יותר מ-2.

הרצאה 25 - אינטגרלים



הגדרה: תחום נורמל לפי x הוא תחום מהצורה:
$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b\ \ f(x)\le y\le g(x)\}$

☆ חישוב אינטגרל על תחום נורמל D:

$$\int_D f = \int_a^b dx\left[\int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\right]$$

משפט 9: תהי $D\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום נורמל לפי x. אזי $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$
כאשר φ_1,φ_2 הן פונקציות רציפות ונניח $f:D\to\mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה.
אז:

$$\text{אינטגרל } f \text{ על תחום } D = \int_D f = \int_a^b dx\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]$$

תזכורת: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi\in C^1$, $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ חח"ע ועל, אזי

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)=c}^{\varphi^{-1}(b)=d} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$

משפט שינוי הקורדינאטות: תהי Q תיבה ב $\mathbb{R}^n$. $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ פונקציה חח"ע ועל, $T\in C^1$.
אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ו- $f\circ T$ פונקציה אינטגרבילית אזי אם $T(Q^*)=Q$
מתקיים ש:

$$\int_Q f(u)\,du = \int_{Q^*}(f\circ T)\left|\det\left(\frac{\partial(T_1,\dots,T_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right)\right|dx$$

תקציר כל חומר הקורס

1) גיאומטריה של $\mathbb{R}^n$

1. מכפלה פנימית ונורמה
2. קבוצות פתוחות וסגורות
3. קבוצות קומפקטיות (סגורה וחסומה)
4. קשירות: רגילה ומסילתית

2) פונקציות ב $\mathbb{R}^n$

1. רציפות לפי קושי והיינה
2. רציפות לפי קבוצות פתוחות, לפי טופולוגיה.
3. נגזרות חלקיות, היו פונקציות לא רציפות עם נגזרות חלקיות. נגזרת = קירוב לינארי.
4. דיפרנציאביליות וגרדיאנט — נגזרות חלקיות רציפות ← דיפרנציאביליות.
5. נגזרות כיווניות. $\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$
6. מטריצת יעקובי, דיפרנציאביליות עם יעקובי.
7. "כלל השרשרת", טורי טיילור בכמה משתנים: יחידות הטור, המקדמים
8. משפט הפונקציה ההפוכה, משפט הפונקציה הסתומה
9. נק' קיצון
10. אינטגרלים