פתרון תרגיל 11 - לינארית

1) חשבו את הפולינום האופייני של המטריצות הבאות:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (מעל שדה הממשיים).

ב. $\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 1-i & i \end{pmatrix}$ (מעל שדה המרוכבים).

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (מעל שדה הממשיים).

<u>פתרון:</u>

א) הפולינום האופייני של המטריצה הוא:

$$P_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)-6=\lambda^2-5\lambda-2$$

ב) הפולינום האופייני של המטריצה הוא:

$$P_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-i & -1-i \\ -1+i & \lambda-i \end{vmatrix}=(\lambda-i)^2-(-1-i)(-1+i)=\lambda^2-2\lambda i-3$$

ג) הפולינום האופייני של המטריצה הוא:

$$P_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} -2 & \lambda-3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}==\lambda\left(\lambda^2-4\lambda+3-4\right)-\lambda(4+\lambda-3)=\lambda\left(\lambda^2-5\lambda-2\right)$$

2) יהיו A,B מטריצות. הוכיחו: ע"ע של BA שווים לע"ע של AB.

<u>פתרון:</u> נוכיח בלי הגבלת הכלליות שכל ע"ע של AB הוא גם ע"ע של BA.

נניח כי λ ע"ע של AB, כלומר קיים וקטור $\vec{v}\neq\vec{0}$: $(AB)\vec{v}=\lambda\vec{v}$.

ע"י הכפלה ב- B משמאל נקבל $B(AB)\vec{v}=B(\lambda\vec{v})\Leftarrow(BA)B\vec{v}=\lambda(B\vec{v})$.

נשים לב שקיבלנו ש λ הוא ע"ע של BA מאחר ו- $B\vec{v}$ הוא גם וקטור במרחב.

3) חשבו את הע"ע והו"ע של המטריצות הבאות:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (מעל שדה הממשיים).

ב. $\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 1-i & i \end{pmatrix}$ (מעל שדה המרוכבים).

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (מעל שדה הממשיים).

פתרון:

א) משאלה 1 ידוע לנו שהפולינום האופייני של המטריצה הוא:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

לכן, הע"ע יהיו $\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$.

עבור הע"ע $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ נקבל:

$$V_{\lambda_1} = N\begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & \frac{3-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} -3-\sqrt{33} & 4 \\ 6 & 3-\sqrt{33} \end{pmatrix} =$$

$$= N\begin{pmatrix} 0 & \frac{\left(3-\sqrt{33}\right)\left(3+\sqrt{33}\right)}{6} + 4 \\ 6 & 3-\sqrt{33} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 3-\sqrt{33} \end{pmatrix} = Span\left\{\begin{pmatrix} -\frac{3-\sqrt{33}}{6} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור הע"ע $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ נקבל:

$$V_{\lambda_2} = N\begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & \frac{3+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} -3+\sqrt{33} & 4 \\ 6 & 3+\sqrt{33} \end{pmatrix} =$$

$$= N\begin{pmatrix} 0 & \frac{\left(3-\sqrt{33}\right)\left(3+\sqrt{33}\right)}{6} + 4 \\ 6 & 3+\sqrt{33} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 3+\sqrt{33} \end{pmatrix} = Span\left\{\begin{pmatrix} -\frac{3+\sqrt{33}}{6} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ב) משאלה 1 ידוע לנו שהפולינום האופייני של המטריצה הוא:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda i - 3$$

לכן, הע"ע יהיו $\lambda_{1,2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4+12}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{8}}{2} = i \pm \sqrt{2}$.

עבור הע"ע $\lambda_1 = i + \sqrt{2}$ נקבל:

$$V_{\lambda_1} = N\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1+i \\ 1-i & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Span\left\{\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור הע"ע $\lambda_2 = i - \sqrt{2}$ נקבל:

$$V_{\lambda_2} = N\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+i \\ 1-i & \sqrt{2} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Span\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ג) הפולינום האופייני של המטריצה הוא:

$$P_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} -2 & \lambda-3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} == \lambda\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 4\right) - \lambda\left(4 + \lambda - 3\right) = \lambda\left(\lambda^2 - 5\lambda - 2\right)$$

לכן, הע"ע יהיו $\lambda_{1,2,3} = 0, \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$.

עבור הע"ע $\lambda_1 = 0$ נקבל:

$$V_{\lambda_1} = N\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= N\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור הע"ע $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ נקבל:

$$V_{\lambda_2}=N\begin{pmatrix}\frac{3+\sqrt{33}}{2} & -2 & -1\\ -2 & \frac{-1+\sqrt{33}}{2} & -2\\ -1 & -2 & \frac{3+\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}\frac{3+\sqrt{33}}{2} & -2 & -1\\ 0 & \frac{3+\sqrt{33}}{6} & \frac{-9-\sqrt{33}}{6}\\ 0 & \frac{-9-\sqrt{33}}{6} & \frac{21+5\sqrt{33}}{12}\end{pmatrix}=$$

$$=N\begin{pmatrix}\frac{3+\sqrt{33}}{2} & -2 & -1\\ 0 & \frac{3+\sqrt{33}}{6} & \frac{-9-\sqrt{33}}{6}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\ \frac{1+\sqrt{33}}{4}\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור הע"ע $\lambda_3=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$ נקבל:

$$V_{\lambda_3}=N\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{33}}{2} & -2 & -1\\ -2 & \frac{-1-\sqrt{33}}{2} & -2\\ -1 & -2 & \frac{3-\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix}=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\ \frac{1-\sqrt{33}}{4}\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

ע"י חישוב דומה.

4) אילו מטריצות מבין הבאות ניתנת לליכסון? אם כן, רשום את הצורה המלוכסנת שלה.

א. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ (מעל שדה הממשיים).

ב. $\begin{pmatrix}i & 1+i\\ 1-i & i\end{pmatrix}$(מעל שדה המרוכבים).

ג. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$(מעל שדה הממשיים).

<u>פתרון:</u>

א) נשים לב שהו"ע בת"ל מאחר והם לא כפולה אחד של השני. לכן, המטריצה ניתנת ללכסון ונקבל:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0\\ 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix}$$

כאשר $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \frac{1+\sqrt{33}}{4} & \frac{1-\sqrt{33}}{4}\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

ב) נשים לב שהו"ע בת"ל מאחר והם לא כפולה אחד של השני. לכן, המטריצה ניתנת ללכסון ונקבל:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}i+\sqrt{2} & 0\\ 0 & i-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

כאשר $P=\begin{pmatrix}\frac{1+i}{\sqrt{2}} & -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

ג) נשים לב שהו"ע בת"ל מאחר והע"ע העצמיים המתאימים שונים. לכן, המטריצה ניתנת ללכסון ונקבל:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix}$$

כאשר $P=\begin{pmatrix}\frac{1+i}{\sqrt{2}} & -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

5) הגדרה: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m\in\mathbb{F}[x]$ אזי הצבה של A בפולינום מוגדר להיות $f(x)=a_0I+a_1A+\cdots+a_mA^m$:

נתון הפולינום $f(x)=x^2+2x+1$. הציבו את המטריצות שהוגדרו בשאלות הקודמות בפולינום הנתון.

<u>פתרון:</u>

א) נציב את המטריצה בפולינום:

$$f\left(A\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 14\\ 21 & 31\end{pmatrix}$$

ב) נציב את המטריצה בפולינום:

$$f\left(A\right)=\begin{pmatrix}i & 1+i\\ 1-i & i\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}i & 1+i\\ 1-i & i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -2+2i\\ 2+2i & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2i & -2+2i\\ 2+2i & 2i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2i & -4+4i\\ 4+4i & 2+2i\end{pmatrix}$$

ג) נציב את המטריצה בפולינום:

$$f\left(A\right)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 10 & 6\\ 10 & 17 & 10\\ 6 & 10 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\ 4 & 6 & 4\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 14 & 8\\ 14 & 24 & 14\\ 8 & 14 & 9\end{pmatrix}$$

בהצלחה!