תרגיל 10 אלגברה לינארית למורים תש"ף

17 ביוני 2020

1. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתון מ"ו V ושני תתי מרחבים W_1, W_2. בכל אחד מהסעיפים מצאו בסיס ומימד של $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$.

(א) המרחב $V = \mathbb{R}^4$ ותתי המרחבים

$$W_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 22 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in V \mid \begin{matrix} a - b - c + d = 0 \\ 3a - 2b + 2d = 0 \end{matrix} \right\}$$

פתרון: נתחיל ב W_1: נמיר את W_1 להצגה ע"י משוואות ע"י שנבדוק מתי וקטור כללי $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in V$ שייך ל W_1. זה קורה אמ"מ קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ כך ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 4 \\ 22 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

שלפי כפל עמודה ניתן לכתוב

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -12 & 22 \\ 3 & -1 & -7 & 0 & -14 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

שזה שקול לכך שאחרי דירוג של $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 2 & 0 & 5 & -12 & 22 & b \\ 3 & -1 & -7 & 0 & -14 & c \\ 4 & 3 & 1 & 6 & -4 & d \end{array}\right)$ לא תהיה שורת סתירה. נדרג ונבדוק

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 2 & 0 & 5 & -12 & 22 & b \\ 3 & -1 & -7 & 0 & -14 & c \\ 4 & 3 & 1 & 6 & -4 & d \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & -2 & 1 & -12 & 14 & b-2a \\ 0 & -4 & -13 & 0 & -26 & c-3a \\ 4 & 3 & 1 & 6 & -4 & d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & -2 & 1 & -12 & 14 & b-2a \\ 0 & -4 & -13 & 0 & -26 & c-3a \\ 0 & -1 & -7 & 6 & -20 & d-4a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & -1 & -7 & 6 & -20 & d-4a \\ 0 & -4 & -13 & 0 & -26 & c-3a \\ 0 & -2 & 1 & -12 & 14 & b-2a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2]{R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & -1 & -7 & 6 & -20 & d-4a \\ 0 & 0 & 15 & -24 & 54 & c+13a-4d \\ 0 & 0 & 15 & -24 & 54 & b+6a-2d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & -1 & -7 & 6 & -20 & d-4a \\ 0 & 0 & 15 & -24 & 54 & c+13a-4d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-7a+2d-c \end{array}\right)$$

ולכן $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in W_1$ אמ"מ $b - 7a + 2d - c = 0$. או במילים אחרות

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in V \mid -7a + b - c + 2d = 0 \right\}$$

ובנוסף מאותו דירוג (אם נסתכל על החלק משמאל לקו) נגלה כי בשלושת העמודות הראשונות יש איבר מוביל בצורה מדורגת (ורק בהם) ולכן שלושת העמודות הראשונות

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(במטריצה שהתחלנו איתה) הם קבוצה בת"ל מקסימאלית (מבין העמודות של המטריצה שהתחלנו איתה) ולכן הם בסיס ל W_1 (שהרי העמודות של המטריצה שהתחלנו איתה מהוות קבוצה פורשת ל W_1) ולכן $\dim W_1 = 3$.

כעת נעבור ל W_2: נפתור את המערכת

$$\begin{aligned} a - b - c + d = 0 \\ 3a - 2b + 2d = 0 \end{aligned}$$

שמגדירה את W_2וכך נמצא בסיס ל W_2 (נדרג את הייצוג המטריצי שלה, נשמיט בכתיבה את וקטור התוצאה של האפסים)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו צורה מדורגת קנונית. נסמן את המשתנים החופשיים בפרמטרים $c = t$ (למשתנה השלישי) ו $d = s$ (למשתנה הרביעי) ונקבל מהמשוואה השניה כי $b = -3t + s$ ומהמשוואה הראשונה כי $a = -2t$ וביחד נקבל כי קבוצת כל

הפתרונות (שזה W_2) שווה ל

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ -3t+s \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס של W_2 ולכן $\dim W_2 = 2$.

כעת נעבור ל $W_1 \cap W_2$: קל לחשב חיתוך תתי מרחבים בהצגתם ע"י מערכת משוואות. נשתמש בהצגה זו של W_1, W_2 ונקבל כי

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in V \mid \begin{array}{c} -7a+b-c+2d=0 \\ a-b-c+d=0 \\ 3a-2b+2d=0 \end{array} \right\}$$

ועכשיו נפתור את המערכת על מנת למצוא בסיס. נדרג

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -7 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + 7R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 6R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{10} R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 + R_3]{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{13}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

וקיבלנו צורה מדורגת קנונית. נסמן את המשתנה החופשי בפרמטר $d = t$ (למשתנה הרביעי) ונקבל מהמשוואה השלישית כי $c = -\frac{3}{10}t$ מהמשוואה השניה כי $b = \frac{19}{10}t$ ומהמשוואה הראשונה כי $a = \frac{6}{10}t$ וביחד נקבל כי קבוצת כל הפתרונות (שזה $W_1 \cap W_2$) שווה ל

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{6}{10}t \\ \frac{19}{10}t \\ -\frac{3}{10}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} \frac{6}{10} \\ \frac{19}{10} \\ -\frac{3}{10} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{6}{10} \\ \frac{19}{10} \\ -\frac{3}{10} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{\begin{pmatrix}6\\19\\-3\\10\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $W_1 \cap W_2$ ולכן $\dim\left(W_1 \cap W_2\right) = 1$.

כעת נעבור ל $W_1 + W_2$: לפי משפט המימדים נוכל כבר עכשיו לחשב כי

$$\dim\left(W_1 + W_2\right) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim\left(W_1 \cap W_2\right) = 3 + 2 - 1 = 4$$

ומכיוון ש $W_1 + W_2$ הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^4$ והם מאותו מימד אז הם שווים. כלומר $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ ואפשר לקחת את הבסיס

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

המוכר של $\mathbb{R}^4$. לחילופין, בלי שימוש במשפט המימדים, יכלנו להיעזר בצגת span של שני המרחבים ולקבל כי

$$\begin{aligned}W_1 + W_2 &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\-7\\1\end{pmatrix}\right\} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\\ &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\-7\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

ולצמצם את הקבוצה הפורשת $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\-7\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

לבסיס של W_1+W_2. נעשה זאת ע"י דירוג המטריצה שאלו עמודתיה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -13 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -13 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -13 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2]{R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & -15 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -3 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו צורה מדורגת שבארעת העמודות הראשונות יש איבר מוביל (ורק בהם) ולכן, בדומה לנימוק שראינו מקודם, הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ארבעת העמודות מהמטריצה שהתחלנו איתם) היא בסיס ל W_1+W_2.

(ב) המרחב $V=\mathbb{R}_3[x]$ ותתי המרחבים

$$W_1 = \text{span}\left\{2+x^3, 15+x+x^2\right\}$$

$$W_2 = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid \begin{array}{c} a - 5b - 10c - 2d = 0 \\ b - c + d = 0 \end{array} \right\}$$

פתרון: עבור W_1: נתחיל עם הצגתו בעזרת מערכת משוואות. ניקח פולינום כללי $a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ ונבדוק מתי הוא שייך ל W_1. כלומר מתי הוא צירוף לינארי של $x^3 + 2, x^2 + x + 15$, שזה אומר שקיימים סקלרים α_1, α_2 כך ש

$$\alpha_1 \left(2 + x^3\right) + \alpha_2 \left(15 + x + x^2\right) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

ונוכל לסדר מחדש את אגף שמאל לקבל

$$(2\alpha_1 + 15\alpha_2) + \alpha_2 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x^3 = a + bx + cx^2 + dx^3$$

שזה בעצם מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 15\alpha_2 & = a \\ \alpha_2 & = b \\ \alpha_2 & = c \\ \alpha_1 & = d \end{cases}$$

שצריך לוודא שיש לה פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת את מערכת המשוואות הזאת ונבדוק זאת:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 15 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 1 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 2 & 15 & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 15 & a - 2d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 15R_2]{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c - b \\ 0 & 0 & a - 2d - 15b \end{array}\right)$$

הגענו לכך ש: למערכת יש פתרון אמ"מ $c-b=0$ וגם $a-2d-15b=0$. ולכן

$$\operatorname{span}\left\{x^3+2, x^2+x+15\right\}=\left\{a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x] \mid \begin{array}{c} a-15b-2d=0 \\ -b+c \end{array}\right\}$$

ובנוסף מאותו דירוג (אם נסתכל על החלק משמאל לקו) נגלה כי $\left\{2+x^3, 15+x+x^2\right\}$ בת"ל ולכן הם בסיס ל W_1 (נתון כי הם פורשים) ולכן $\dim W_1=2$.

עבור W_2: נפתור את המערכת

$$\begin{array}{c} a-5b-10c-2d=0 \\ b-c+d=0 \end{array}$$

שמגדירה את W_2וכך נמצא בסיס ל W_2 (נדרג את הייצוג המטריצי שלה, נשמיט בכתיבה את וקטור התוצאה של האפסים)

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftarrow R_1+5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו צורה מדורגת קנונית. נסמן את המשתנים החופשיים בפרמטרים $c=t$ (למשתנה השלישי) ו $d=s$ (למשתנה הרביעי) ונקבל מהמשוואה השניה כי $b=t-s$ ומהמשוואה הראשונה כי $a=15t-3s$ וביחד נקבל כי

$$W_2=\left\{(15-3t)+(t-s)x+t\cdot x^2+s\cdot x^3 \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\left(15+x+x^2\right)+s\left(-3-x+x^3\right) \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\right.$$

ו $\left\{\left(15+x+x^2\right),\left(-3-x+x^3\right)\right\}$ בסיס של W_2 ולכן $\dim W_2=2$.

כעת נעבור ל $W_1\cap W_2$: קל לחשב חיתוך תתי מרחבים בהצגתם ע"י מערכת משוואות. נשתמש בהצגה זו של W_1,W_2 ונקבל כי

$$W_1\cap W_2=\left\{a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x] \mid \begin{array}{c} a-15b-2d=0 \\ -b+c \\ a-5b-10c-2d=0 \\ b-c+d=0 \end{array}\right\}$$

ועכשיו נפתור את המערכת על מנת למצוא בסיס. נדרג

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -15 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 + R_2]{R_3 \leftarrow R_3 + 10R_2} \begin{pmatrix} 1 & -15 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftarrow -R_2]{R_4 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -15 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + 2R_4} \begin{pmatrix} 1 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + 15R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו צורה מדורגת קנונית. נסמן את המשתנה החופשי בפרמטר $c = t$ (למשתנה השלישי) ונקבל מהמשוואה הרביעית כי $d = 0$ מהמשוואה השניה כי $b = t$ ומהמשוואה הראשונה כי $a = 15t$ ונקבל כי

$$W_1 \cap W_2 = \left\{15t + t \cdot x + t \cdot x + 0 \cdot x^3 \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t\left(15 + x + x^2\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}\left\{15 + x + x^2\right\}$$

ו $\left\{15 + x + x^2\right\}$ בסיס של $W_1 \cap W_2$ ולכן $\dim\left(W_1 \cap W_2\right) = 1$.

כעת נעבור ל $W_1 + W_2$: לפי משפט המימדים נוכל כבר עכשיו לחשב כי

$$\dim\left(W_1 + W_2\right) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim\left(W_1 \cap W_2\right) = 2 + 2 - 1 = 3$$

וולכן $W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}_3[x]$ (זכרו כי $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$) נעזר בהצגת span של שני

המרחבים לקבל כי

$$\begin{aligned}W_1+W_2&=\text{span}\left\{2+x^3,15+x+x^2\right\}+\text{span}\left\{15+x+x^2,-3-x+x^3\right\}\\&=\text{span}\left\{2+x^3,15+x+x^2,15+x+x^2,-3-x+x^3\right\}\end{aligned}$$

ולצמצם את הקבוצה הפורשת $\left\{2+x^3,15+x+x^2,15+x+x^2,-3-x+x^3\right\}$ לבסיס של W_1+W_2. נעשה זאת ע"י בדיקת אי-תלות ולקיחת קבוצה בת"ל מקסימאלית. ניקח צירוף לינארי ששווה אפס

$$\alpha_1\left(2+x^3\right)+\alpha_2\left(15+x+x^2\right)+\alpha_3\left(15+x+x^2\right)+\alpha_4\left(-3-x+x^3\right)=0+0x+0x^2+0x^3$$

ונבדוק איזה תלות לינארית יש (אנחנו יודעים שיש כי $\dim\left(W_1+W_2\right)=3$). את אגף שמאל של השיוון נסדר מחדש לקבל

$$\left(2\alpha_1+15\alpha_2+15\alpha_3-3\alpha_4\right)+\left(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4\right)x+\left(\alpha_2+\alpha_3\right)x^2+\left(\alpha_1+\alpha_4\right)x^3$$

שזוהי מערכת המשוואות

$$\begin{cases}2\alpha_1+15\alpha_2+15\alpha_3-3\alpha_4&=0\\\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4&=0\\\alpha_2+\alpha_3&=0\\\alpha_1+\alpha_4&=0\end{cases}$$

(ע"י השוואת מקדמי הפולינום). נדרג את המטריצה שמייצגת מערכת זאת

(נשמיט את וקטור התוצאה של האפסים)

$$\begin{pmatrix} 2 & 15 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 15 & 15 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 15R_2]{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 10R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו צורה מדורגת שבעמודות מספר $1, 2, 4$ יש איבר מוביל (ורק בהם) ולכן, בדומה לנימוק שראינו מקודם, הקבוצה

$$\left\{2 + x^3, 15 + x + x^2, -3 - x + x^3\right\}$$

(הפולינומים מספר $1, 2, 4$) היא בסיס ל $W_1 + W_2$.

(ג) המרחב $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ ותתי המרחבים

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

.

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \begin{array}{c} a + b - c - d = 0 \\ a - b + c + 3d = 0 \end{array} \right\}$$

פתרון: עבור W_1: נעיר כי

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \;:\; a, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;:\; a, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

וכעת בצורה דומה לתרגיל הקודם, ניקח מטריצה כללית $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ונבדוק מתי הוא שייך ל W_1. כלומר מתי הוא צירוף לינארי של $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, שזה אומר שקיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(שימו לב שאני מעדיף להשתמש באותיות a, b, c, d למטריצה הכללית וב α למינהן כמקדמי צירוף לינארי) ונוכל לסדר מחדש את אגף שמאל לקבל

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

שזה בעצם מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= b \\ \alpha_3 &= c \\ -\alpha_1 &= d \end{cases}$$

שצריך לוודא שיש לה פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת את מערכת המשוואות הזאת ונבדוק זאת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ -1 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d+a \end{array}\right)$$

הגענו לכך ש: למערכת יש פתרון אמ"מ $a+d=0$. ולכן

$$W_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\mid a+d=0\right\}$$

ובנוסף מאותו דירוג (אם נסתכל על החלק משמאל לקו) נגלה כי $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ בת"ל ולכן הם בסיס ל W_1 (נתון כי הם פורשים) ולכן $\dim W_1=3$.

עבור W_2: נפתור את המערכת

$$\begin{aligned} a+b-c-d&=0\\ a-b+c+3d&=0 \end{aligned}$$

שמגדירה את W_2וכך נמצא בסיס ל W_2 (נדרג את הייצוג המטריצי שלה, נשמיט בכתיבה את וקטור התוצאה של האפסים)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2\leftarrow -\frac{1}{2}R_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו צורה מדורגת קנונית. נסמן את המשתנים החופשיים בפרמטרים $c=t$ (למשתנה השלישי) ו $d=s$ (למשתנה הרביעי) ונקבל מהמשוואה השניה כי $b=t+2s$ ומהמשוואה הראשונה כי $a=-s$ וביחד נקבל כי

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix} -s & t+2s \\ t & s \end{pmatrix}\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ו $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס של W_2 ולכן $\dim W_2=2$.

כעת נעבור ל $W_1\cap W_2$: קל לחשב חיתוך תתי מרחבים בהצגתם ע"י מערכת משוואות. נשתמש בהצגה זו של W_1,W_2 ונקבל כי

$$W_1\cap W_2=\left\{a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]\mid \begin{array}{r} a+d=0\\ a+b-c-d=0\\ a-b+c+3d=0 \end{array}\right\}$$

ועכשיו נפתור את המערכת על מנת למצוא בסיס. נדרג

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-R_1]{R_2\leftarrow R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו צורה מדורגת קנונית. נסמן את המשתנים החופשיים בפרמטרים $c=t$ (למשתנה השלישי) ו $d=s$ (למשתנה הרביעי) ונקבל מהמשוואה השניה כי $b=t+2s$ ומהמשוואה הראשונה כי $a=-s$ וביחד נקבל כי

$$W_1\cap W_2=\left\{\begin{pmatrix} -s & t+2s \\ t & s \end{pmatrix} \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\left(- \right.\right.$$

ו $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $W_1\cap W_2$ ולכן $\dim(W_1\cap W_2)=$ 2. כיוון ש $W_1\cap W_2\subseteq W_2$ והם מאותו מימד הם שווים, כלומר $W_1\cap W_2=W_2$.

כעת נעבור ל W_1+W_2: לפי משפט המימדים נוכל כבר עכשיו לחשב כי

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)=3+2-2=3$$

ולכן $W_1\subseteq W_1+W_2$ מאותו מימד ולכן הם שווים, כלומר $W_1=W_1+W_2$ ובסיס של W_1 שראינו יהיה גם בסיס של W_1+W_2.

2. בסעיף זה - הוכיחו את חלקו העיקרי של המשפט "השלישי חינם" (אפשר להשתמש בכל המשפטים שמופיעים לפני "השלישי חינם" במצגת). יהא V מ"ו ממימד n ותהא B קבוצה עם n וקטורים. הוכיחו כי B בת"ל אמ"מ B פורשת את V.
פתרון: בכיוון אחד: נניח כי B בת"ל אזי אפשר להשלים אותה לבסיס ל V. כלומר, קיימת $\hat{B}\supseteq B$ כך ש $\hat{B}$ בסיס ל V. מכיוון ש $\hat{B}$ בסיס ל V יש בה n איברים ומכיוון ש $\hat{B}\supseteq B$ ושניהם עם n איברים הם שווים. כלומר $B=\hat{B}$ ולכן B בסיס של V ולכן B פורשת את V. בכיוון שני: נניח כי B פורשת את V אזי אפשר לצמצם אותה לבסיס. כלומר, קיימת $\hat{B}\subseteq B$ כך ש $\hat{B}$ בסיס ל V. מכיוון ש $\hat{B}$ בסיס ל V יש בה n איברים ומכיוון ש $\hat{B}\subseteq B$ ושניהם עם n איברים הם שווים. כלומר $B=\hat{B}$ ולכן B בסיס של V ולכן B בת"ל.

3. יהא V מ"ו ו W ת"מ. הפריכו את הטענה הבאה: אם B בסיס של V אז קיימת $\hat{B}\subseteq B$ כך ש $\hat{B}$ בסיס של W.

פתרון: עבור $V=\mathbb{R}^2$ ו $W=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ מתקיים כי

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס של V אבל $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\notin W$ ולכן $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ אינה בסיס ל W וגם $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ אינה בסיס ל W(כמובן ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\emptyset$ אינם בסיס ל W כיוון ש $\dim W=1$).