חשבון אינפיניטיסימלי-תרגיל 4

שאלה 1. מצאו את הגבולות הבאים אם קיימים (במובן הרחב):

(1) $\lim_{n\to\infty}(3^{1/2}-3^{1/3})\cdot(3^{1/2}-3^{1/4})\cdots(3^{1/2}-3^{1/n})$

(2) $\lim_{n\to\infty}\Sigma_{i=0}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}$

(3) $\lim_{n\to\infty}e^{n-n^2}$

<u>הערה:</u> בשאלה 3 הסביר בסגנון " $e^{n^2-n}\to\infty$ " לא תתקבל, היות ועוד לא הוכחנו זאת. אם משהו רוצה להוכיח ואז להשתמש מוזמן, אבל מומלץ להשתמש במשפט הסנדוויץ.

שאלה 2. יהי $\langle a_n\colon n\in\mathbb{N}\rangle,\langle b_n\colon n\in\mathbb{N}\rangle$ שתי סדרות של ממשיים. עוד נניח כי הסדרה $\langle b_n\colon n\in\mathbb{N}\rangle$ מונוטונית עולה ממש לאינסוף. הוכיחו כי אם:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L<\infty$$

אזי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$$

(רמז: ההסתכלו על השוויון $a_n=[(a_n-a_{n-1})+\cdots(a_{n_0+2}-a_{n_0+1})]+a_{n_0+1}$ והשתמשו בהנחה)

שאלה 3.

(1) יהי $a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$ חיוביים ממש. הוכיחו את אי-שוויון הממוצעים:

$$\frac{n}{\Sigma_{i=0}^n\frac{1}{a_i}}\leq(\Pi_{i=0}^n a_i)^{1/n}\leq\frac{\Sigma_{i=0}^n a_i}{n}$$

(במילים: הממוצע ההרמוני קטן מהממוצע ההנדסי קטן מהממוצע החשבוני). הראו בנוסף כי שוויון מתקיים אם ורק אם $a_0=a_1=\cdots=a_n$

(2) נניח הסדרה $\langle a_n\colon n\in\mathbb{N}\rangle$ מתכנסת לגבול סופי L. הראו כי גם הממוצעים החשבוניים וההנדסיים של הסדרה הנ"ל מתכנסות ל-L (ה עזרו בשאלה 2).