(1)

שיטות אינטגרציה - המשך

תזכורת: הצבה ישרה

$$\int f(t)\,dt \Leftarrow \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

$$t=\varphi(x)$$

$$dt=\varphi'(x)\,dx$$

דוגמה:

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} =$$

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x$$

$$t=\sin 2x$$

$$dt = 2\cos 2x$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{t}\right)+C = -\frac{1}{8\sin 2x}+C$$

~~הצבה~~ דוגמה:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}+C = \sqrt{2x-3}+C$$

$$t=2x-3$$

$$dt=2dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$$

הצבה הפוכה: סם נאה פונק' עד כה

$$\int f(x)\,dx$$

אנחנו רוצים למצוא פונק' $\varphi(t)=x$ כך ש

להפוך את האינטגרל שלנו לאינטגרל של משתנה t וכן $dx=\varphi'(t)\,dt$ ואז נקבל:

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

$$\int x \sqrt[6]{2x+3}\, dx$$

$$2x+3 = t^6 \Rightarrow x = \frac{t^6-3}{2}$$

$$t = \sqrt[6]{2x+3} \qquad dx = 6t^5\, dt$$

$$\int x \sqrt[6]{2x+3}\, dx = \int \left(\frac{t^6-3}{\cancel{2}}\right) \cdot t \cdot \overset{3}{\cancel{6}} t^5\, dt =$$

$$= 3\int (t^{12} - 3t^6)\, dt = 3\left(\frac{t^{13}}{13} - \frac{3t^7}{7}\right) + C =$$

$$= 3\left(\frac{(\sqrt[6]{2x+3})^{13}}{13} - \frac{3}{7}(\sqrt[6]{2x+3})^7\right) + C$$

[illegible]

$$\cancel{\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}} \qquad a \neq 1$$

[illegible]

$$\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\, dx$$

$$\frac{2-x}{2+x} = t^3$$

$$2-x = (2+x)t^3$$

$$2-2t^3 = x(t^3+1)$$

$$x = \frac{2-2t^3}{t^3+1} = 2 \cdot \frac{1-t^3}{t^3+1}$$

$$dt = 2\,\frac{\left(-3t^2(t^3+1) - 3t^2(1-t^3)\right)}{(t^3+1)^2}\, dt =$$

$$= \frac{-12t^2}{(t^3+1)^2}\, dt$$

$$2-x = 2 - \frac{2(1-t^3)}{(t^3+1)} = \frac{4t^3}{t^3+1}$$

$$= \int \frac{2(t^3+1)^2}{16t^6} \cdot t \cdot \left(\frac{-12t^2}{(t^3+1)^2}\right) dt =$$

$$= \int -\frac{24t^3}{16t^6}\, dt = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{t^2} + c =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2/3} + c$$

שאלה:

$$\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\, dx =$$

$$t^2 = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\Downarrow$$

$$(e^x+1)t^2 = e^x - 1 \Rightarrow e^x t^2 + t^2 = e^x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x(t^2-1) = -t^2 - 1$$

$$\Downarrow$$

$$e^x = -\frac{t^2+1}{t^2-1} \Rightarrow \cancel{x} = e^x = \frac{t^2+1}{1-t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \ln(t^2+1) - \ln(1-t^2)$$

$$\Downarrow$$

$$dx = \left(\frac{1}{t^2+1} \cdot 2t - \frac{1}{1-t^2}(-2t)\right) dt =$$

$$= \left(\frac{2t}{t^2+1} + \frac{2t}{1-t^2}\right) dt$$

$$\int \frac{2t^2}{t^2+1} + \frac{2t^2}{1-t^2} = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2+1-1}{1-t^2} =$$

$$= 2\int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt + 2\int\left(-1 + \frac{1}{1-t^2}\right) dt$$

$$= 2\left[t - \arctan t\right] + 2\left[-t + \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t}\right] + c =$$

$$= -2\arctan\left(\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\right) - \ln\left[\frac{1-\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}}{1+\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}}\right] + c$$

תרגיל:

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+4}$$

פתרון: נציב $x = t^2$ $dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+4} = \int \frac{t}{t^2+4}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2+4-4}{t^2+4}\,dt =$$

$$= 2t - 2\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} = 2\sqrt{x} - 4\int \frac{du}{u^2+1} = 2\sqrt{x} - 4\arctan u + c =$$

$$= 2\sqrt{x} - 4\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + c$$

אינט׳ פונקציות

A עבור פולי׳ טריג׳: $m, n \in \mathbb{Z}$: $\sin^m x \cos^n x$

אם m אי זוגי, אז נציב: $t = \cos x$

ונקבל: $dt = -\sin x\,dx$ $dx = -\frac{dt}{\sin x}$

$$\sin x = \sqrt{1-t^2}$$

נקבל:

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx = -\int \sin^m x \cdot t^n \cdot \frac{dt}{\sin x} =$$

$$= -\int \sin^{m-1} x\, t^n\,dt = \int (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}} t^n\,dt$$

(אם m אי זוגי אז מתקיים: $m-1$ זוגי ולכן ניתן לחלוקה ב 2)

אם n אי זוגי ניקח $t=\sin x$ ואז

$$dt=\cos x\,dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos x}$$

$$\cos x=\sqrt{1-t^2}$$

לכן:

$$\int \sin^m x\cdot\cos^n x\,dx=\int t^m\cdot\cos^n x\cdot\frac{dt}{\cos x}=$$

$$=\int t^m\cos^{n-1}x\,dt=\int t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt$$

הערה: אם גם m וגם n זוגיים - הנכח..

אז לא נגמור.

דוגמה:

$$\int \sin^7 x\cos^4 x\,dx$$

ניקח $t=\cos x$ ואז:

$$dt=-\sin x\,dx \Rightarrow dx=-\frac{dt}{\sin x}$$

$$\sin x=\sqrt{1-t^2}$$

ולכן:

$$-\int \sin^7 x\cdot t^4\frac{dt}{\sin x}=-\int \sin^6 x\cdot t^4\,dt=$$

$$=-\int(1-t^2)^3\cdot t^4\,dt=$$

$$=-\int(1-3t^2+3t^4-t^6)\,t^4\,dt=$$

תרגיל: חשב את האינטגרלים הבאים:

1)

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{x-\sqrt{x+1}+1}\,dx$$

ניקח $x+1=t^2$ ולכן $x=t^2-1$

$$dx=2t\,dt$$

$$\int\frac{t+2}{t^2-t}\cdot 2t\,dt=2\int\frac{t-1+3}{t-1}\,dt=2\left[\int dt+3\int\frac{dt}{t-1}\right]=$$

$$=2t+6\ln|t-1|+C=2\sqrt{x+1}+6\ln(\sqrt{x+1}-1)+C$$

5

2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3-4x-x^2}}$$

פתרון:

$$~~\int \frac{dx}{\sqrt{-3-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t)+c~~$$

$~~t = x+2~~$

3.

$$\int \sin^6 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

פתרון:

$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$ אזי $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ אזי $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$\sin^4 x = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 \quad !$$

נכפול את שני המשוואות האחרונות לקבל:

$$\int \sin^6 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx \cos^2 x \, dx =$$

$$= \int \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 \cdot \frac{1}{4}\sin^2 2x \, dx = \frac{1}{16}\Big[\int \sin^2 2x \, dx -$$

$$- \int 2\cos 2x \sin^2 2x \, dx + \int \cos^2 2x \sin^2 2x \, dx\Big]$$

נחשב את כל אחד מ- האינטגרלים:

$$\int \sin^2 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

$$\cos 4x = \cos 2 \cdot 2x = 1 - 2\sin^2 2x$$

$t = \sin 2x$ נציב: נסמן: $\int 2\cos 2x \sin^2 2x \, dx$

ולכן $dt = 2\cos 2x \, dx$ אז

$$\int 2\cos 2x \sin^2 2x \, dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + c =$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 2x + c$$

$$\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^2 = \cos^2 2x \sin^2 2x$$

לפי $\cos 8x = 1 - 2\sin^2 4x$ לכן

$$\int \cos^2 2x \sin^2 2x \, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 4x \, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 8x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}\sin 8x + c$$

(נחבר את 8 התוצאה ונקבל את הדרוש.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$u = \sqrt{a^2-x^2}$ $\quad dv = 1 \cdot dx$

$du = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\quad v = x$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} -$$

$$- \int \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin u + c =$$

$u = \frac{x}{a}$ $\quad = \arcsin \frac{x}{a} + c$

$du = \frac{1}{a}dx$

$\Downarrow$

(לכן את $-\sqrt{a^2-x^2}$ נעביר ונקבל

$$2\int \sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + c \quad /:2$$

ונקבל את הדרוש.

~~[illegible]~~

$$\int \frac{6}{\sqrt{7-4x^2+4x}} = 6\int \frac{1}{\sqrt{8-(2x-1)^2}}\,dx = \cancel{3\int\frac{2dt}{\sqrt{7}}}$$ (5

$$\cancel{t = 2x-1}$$
$$\cancel{dt = 2\,dx}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{8}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt8}\right)^2}}\,dx = \frac{\cancel{6}}{\cancel{\sqrt8}}\cdot\frac{\sqrt8}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{3\sqrt8}{4}\arcsin t + c =$$

$$t = \frac{2x-1}{\sqrt8} \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt8}\,dx$$

$$= \frac{3\cancel{\sqrt8}}{\cancel{4}}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt8} + c$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx = \int(\cos^2x-\sin^2x)(\cos^2x+\sin^2x)\,dx =$$ (6

$$= \int(\cos^2x-\sin^2x)\,dx = \int\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + c$$

$$\int \sin^2 3x\,dx = \int\left(\frac12 - \frac{\cos 6x}{2}\right)dx =$$ (7

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + c$$

$$\int 7\cot^2\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)dx$$ (8

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$ [illegible]

$$\int \sin^2 3x\,dx = \int\left(\frac12 - \frac{\cos 6x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + c$$