

אינפי 1 – מתמטיקה – פתרון תרגיל 4

1. מצאו את משוואת המשיק של הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=a$. את הגזירות יש לבצע לפי הגדרת הנגזרת בלבד:
I. $a=1, f(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$

יהי $\Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{(x+\Delta x)^4 - (x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) + 1 - (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{\Delta x} =$$

$$\frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 3x\Delta x^3 + \Delta x^4 - x^3 - 3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2 - \Delta x^3 + x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x - \Delta x + 1 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}{\Delta x} =$$

$$= \frac{4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 3x\Delta x^3 + \Delta x^4 - 3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2 - \Delta x^3 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= 4x^3 + 6x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - 3x^2 - 3x\Delta x - \Delta x^2 + 2x + \Delta x - 1$$

כעת נוכל לקחת חלק סטנדרטי ונקבל: $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

לכן השיפוע של המשיק בנקודה $x=1$ הוא $m=2$. לכן בנקודה $(x_0, y_0) = (1, 1)$ משוואת המשיק היא: $y-1=2(x-1)$. כלומר $y=2x-1$.

II. $a=4, f(x)=\sqrt[3]{x+4}$

יהי $\Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x+4} - \sqrt[3]{x+4}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt[3]{x+\Delta x+4} - \sqrt[3]{x+4})(\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{(x+4)^2})}{\Delta x(\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{(x+4)^2})} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{(x+4)^2})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{(x+4)^2}}$$

כעת ניתן לקחת חלק סטנדרטי:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}} \text{ כלומר } st(\dots) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+4)^2} + \sqrt[3]{x+4}\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{(x+4)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}$$

לכן בנקודה $x=4$ השיפוע הוא $m=\frac{1}{12}$. לכן בנקודה $(x_0, y_0) = (4, 2)$ משוואת המשיק היא: $y-2=\frac{1}{12}(x-4)$ כלומר

$$y = \frac{1}{12}x + \frac{5}{3}$$

2. מצאו את הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ (השתמשו בכללי גזירה שלמדנו):
I. $f(x) = (2x+3)^6(x^2-x-1)$

נסמן $u = (2x+3)^6$ ואז $u' = 6(2x+3)^5 \cdot 2$, וכן $v = x^2 - x - 1$ ואז $v' = 2x - 1$, לכן:

$$f' = u'v + uv' = 12(2x+3)^5(x^2-x-1) + (2x+3)^6(2x-1)$$

$$f(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 3}{6x^4 - 16} \quad \text{II}$$

נסמן $u=4x^3-3x^2+x-3$ ואז $u'=12x^2-6x+1$, וכן $v=6x^4-16$ ואז $v'=24x^3$, לכן:

$$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(12x^2-6x+1)(6x^4-16) - 24x^3(4x^3-3x^2+x-3)}{(6x^4-16)^2}$$

$$f(x) = (((2x+3)^4+5)^6+7)^8 \quad \text{III}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7(((2x+3)^4+5)^6+7)' = \\ &= 8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7 6((2x+3)^4+5)^5((2x+3)^4+5)' = \\ &= 8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7 6((2x+3)^4+5)^5(2x+3)^3(2x+3)' = \\ &= 8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7 6((2x+3)^4+5)^5 4(2x+3)^3 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{((x+1)^2+1)^2}{(x^2-3x-3)^{20}} \quad \text{IV}$$

נסמן $u=((x+1)^2+1)^2$ ואז $u'=4((x+1)^2+1)(x+1)$, וכן $v=(x^2-3x-3)^{20}$ ואז $v'=20(x^2-3x-3)^{19}(2x-3)$, לכן:

$$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{4((x+1)^2+1)(x+1)(x^2-3x-3)^{20} - 20(x^2-3x-3)^{19}(2x-3)((x+1)^2+1)^2}{(x^2-3x-3)^{40}}$$

3. מצאו את ϵ (התלוי בנקודה x וב- dx) המקיים $\Delta y = dy + \epsilon dx$ עבור הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 7x - 9 \quad \text{I}$$

כלומר החלק הסטנדרטי (הנגזרת) הוא 7 ולא נשאר כלום - כלומר $\epsilon = 0$. (הגיונית, זהו קו ישר לכן המשיק שלו בכל נקודה הוא הוא עצמו).

$$f(x) = x^5 \quad \text{II}$$

$$\begin{aligned} \frac{(x+\Delta x)^5 - x^5}{\Delta x} &= \frac{x^5 + 5x^4\Delta x + 10x^3\Delta x^2 + 10x^2\Delta x^3 + 5x\Delta x^4 + \Delta x^5 - x^5}{\Delta x} = \\ &= \frac{5x^4\Delta x + 10x^3\Delta x^2 + 10x^2\Delta x^3 + 5x\Delta x^4 + \Delta x^5}{\Delta x} = 5x^4 + 10x^3\Delta x + 10x^2\Delta x^2 + 5x\Delta x^3 + \Delta x^4 \end{aligned}$$

כלומר החלק הסטנדרטי (הנגזרת) הוא $5x^4$ והפרש הוא $\epsilon = 10x^3\Delta x + 10x^2\Delta x^2 + 5x\Delta x^3 + \Delta x^4$

4. תהיינה u, v, w פונקציות גזירות של המשתנה x , ותהי $y = uvw$. בטאו את $\frac{dy}{dx}$ באמצעות $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx}$.

נסמן $q = uv$. מתקיים: $q' = (uv)' = u'v + uv'$. לכן

$$y' = (uvw)' = (qw)' = q'w + qw' = (u'v + uv')w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'$$

או באמצעות צורת הכתיבה האחרת שלמדנו נקבל:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}vw + u\frac{dv}{dx}w + uv\frac{dw}{dx}$$

5. תהיינה u, v פונקציות גזירות של המשתנה x , ותהי $y = \frac{u^2}{v(u-v+1)^4}$. בטאו את $\frac{dy}{dx}$ באמצעות $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$.

נסמן $g = v(u-v+1)^4$, ואז:

$$g' = v'(u-v+1)^4 + v \cdot 4(u-v+1)^3(u'-v')$$

, $f' = 2uu'$, לכן:

$$y' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{2uu'v(u-v+1)^4 - u^2(v'(u-v+1)^4 + 4v(u-v+1)^3(u'-v'))}{v^2(u-v+1)^8}$$

או באמצעות צורת הכתיבה האחרת שלמדנו נקבל:

$$y' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{2u \frac{du}{dx} v(u-v+1)^4 - u^2 \left(\frac{dv}{dx} (u-v+1)^4 + 4v(u-v+1)^3 \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right) \right)}{v^2(u-v+1)^8}$$