פתרון בוחן 88-132 תשע"ח (תיכוניסטים)

<u>שאלה 1 (33 נק')</u>

א. (23 נק') יהיו $\{a_n\},\{b_n\}$ סדרות המתכנסות לגבול $L\in\mathbb{R}$ ותהי $\{c_n\}$ סדרה המקיימת $a_n\le c_n\le b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

הוכיחו כי $\{c_n\}$ מתכנסת ל- L .

יהי $\epsilon>0$. צריך למצוא $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $|c_n-L|<\epsilon$ כלומר $-\epsilon<c_n-L<\epsilon$ כלומר $L-\epsilon<c_n<L+\epsilon$.

מהתכנסות $\{a_n\}$ מקבלים כי יש $N_1\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge N_1$ מתקיים $|a_n-L|<\epsilon$ כלומר $L-\epsilon<a_n<L+\epsilon$.

מהתכנסות $\{b_n\}$ מקבלים כי יש $N_2\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge N_2$ מתקיים $|b_n-L|<\epsilon$ כלומר $L-\epsilon<b_n<L+\epsilon$.

לכן לכל $n\ge N=max(N_{1,}N_2)$ מתקיים $L-\epsilon<a_n\le c_n\le b_n<L+\epsilon$, מש"ל.

ב. (10 נק') הוכיחו כי הסדרה הבאה מתכנסת וחשבו את גבולה: $a_n=\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+...+100^n}$

מתקיים: $a_n\le\sqrt[n]{100^n+100^n+...+100^n}=\sqrt[n]{100\cdot100^n}=100\sqrt[n]{100}\rightarrow100\cdot1=100$

כמו כן: $a_n\ge\sqrt[n]{100^n}=100\rightarrow100$.

לכן לפי משפט הסנדויץ (סעיף א') מתקיים $a_n\rightarrow100$.

<u>שאלה 2 (34 נק')</u>

א. (14 נק') הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ מתכנס עבור $s>1$ ומתבדר עבור $s\le1$.

אם $s\le0$ האיבר הכללי של הטור לא שואף לאפס לכן הטור מתבדר. אחרת, $a_n=\frac{1}{n^s}$ סדרה חיובית היורדת מונוטונית לאפס, לכן לפי משפט העיבוי הטור מתכנס ומתבדר יחדיו עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2^n)^s}$. אך: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2^n)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}(2^{1-s})^n$, וזהו טור הנדסי, אשר מתכנס כאשר $2^{1-s}<1$ ומתבדר כאשר $2^{1-s}\ge1$, כלומר מתכנס כאשר $1-s<0$ ומתבדר כאשר $1-s\ge0$, כלומר מתכנס כאשר $s>1$ ומתבדר כאשר $s\le1$.

ב. (20 נק') מיצאו את כל $c\in\mathbb{R}$ עבורם הטור הבא מתכנס: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^c}{(3n)!}$

הטור חיובי, לכן נוכל להשתמש במבחן דלאמבר (מבחן המנה):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{((n+1)!)^c}{(3(n+1))!}}{\frac{(n!)^c}{(3n)!}}=\frac{((n+1)!)^c(3n)!}{(3(n+1))!(n!)^c}=\frac{(n+1)^c}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$

עבור $c<3$ נקבל כי הגבול הוא $0<1$, עבור $c=3$ הגבול הוא $\frac{1}{9}<1$, ועבור $c>3$ הגבול הוא $\infty>1$.

כלומר, הטור המקורי מתכנס עבור $c\leq 3$, ומתבדר עבור $c>3$.

<u>שאלה 3 (33 נק')</u>

קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי, או מתבדרים (11 נק' לכל סעיף):

א. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$

נבדוק התכנסות בהחלט: הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ הוא טור חיובי עם איבר כללי אשר שואף מונוטונית לאפס. לכן לפי מבחן העיבוי הוא מתכנס ומתבדר יחדיו עם $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\log(2^n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log 2}$ אשר מתבדר לפי מבחן השוואה שני עם הטור ההרמוני. כלומר הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$ איננו מתכנס בהחלט.

מצד שני, כאמור $\frac{1}{n\log n}$ שואפת מונוטונית לאפס לכן לפי לייבניץ הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$ כן מתכנס בתנאי.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[6]{n^2+n+1}+\sqrt[7]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^7-n^5+1}}$

נבדוק התכנסות בהחלט:

לפי הסתכלות על חזקות גבוהות רואים כי כדאי לבצע מבחן השוואה שני עם הטור $\sum\frac{1}{n^2}$. נקבל:

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^2(\sqrt[6]{n^2+n+1}+\sqrt[7]{n^2+1})}{\sqrt[3]{n^7-n^5+1}}=\frac{\frac{1}{n^{7/3}}n^2(\sqrt[6]{n^2+n+1}+\sqrt[7]{n^2+1})}{\frac{1}{n^{7/3}}\sqrt[3]{n^7-n^5+1}}=\frac{\sqrt[6]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[7]{\frac{1}{n^{1/3}}+\frac{1}{n^{7/3}}}}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^7}}}\to 1$$

כלומר כיוון ש- $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[6]{n^2+n+1}+\sqrt[7]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^7-n^5+1}}$ מתכנס, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[6]{n^2+n+1}+\sqrt[7]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^7-n^5+1}}$ מתכנס בהחלט.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

כיוון ש- $\sqrt[n]{n!} \geq 1$ נקבל כי $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \geq \frac{1}{n}$. לכן לפי מבחן השוואה ראשון עם הטור ההרמוני המתבדר נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ מתבדר.