דוגמה לחישוב אינטגרל של פונקציה רציונאלית כאשר מעלת המונה יותר גדולה מהמעלה של המכנה

18 באפריל 2015

תרגיל: חשבו את $\int \frac{x^4}{1-x^3}dx$

פתרון: נשים לב שכאן מעלת המונה יותר גדולה מהמעלה של המכנה, לכן לא נוכל ישר להשתמש באלגוריתם שראינו בתרגול על מנת לחשב את האינטגרל, לכן קודם כל נחלק את x^4 ב x^3-1 (כלומר נעשה חילוק ארוך), ונקבל: $x^4=-x(1-x^3)-x \Longleftarrow \int \frac{x^4}{1-x^3}dx = \int \frac{-x(1-x^3)-x}{1-x^3}dx = \int -xdx - \int \frac{x}{1-x^3}dx$ אנחנו יודעים ש $\int -xdx = -\frac{x^2}{2}+C$ ולכן נשאר לנו לחשב את $-\int \frac{x}{1-x^3}dx = \int \frac{x}{x^3-1}dx$ שאותו אנחנו נחשב לפי האלגוריתם בגלל שכאן מעלה של המונה יותר קטנה מהמעלה של המכנה.

שלב 1: נפרק את המכנה x^3-1 לגורמים אי פריקים (מעלה של כל גורם אי פריק תהיה 1 או 2 לפי משפט מאלגברה שראינו בתרגול):

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

שלב 2: נכתוב את השבר $\frac{x}{1-x^3}$ כסכום של שברים חלקיים

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

נעשה מכנה משותף ונקבל:

$$x=A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C)$$

מכאן אפשר למצוא את A,B,C בשתי שיטות: השיטה הראשונה היא לפתוח סוגריים, ולהשוות בין המקדמים של צד שמאל ושל צד ימין, לבנות מערכת של 3 משוואות ב 3 נעלמים.

נמצא את A,B,C לפי השיטה השנייה:

נציב $x=1$: $1=3A \Longleftarrow A=\frac{1}{3}$

נציב $x=0$: $0=\frac{1}{3}-C \Longleftarrow C=-\frac{1}{3}$

נציב $x=-1$: $-1=\frac{1}{3}-2(-B+\frac{1}{3}) \Longleftarrow B=\frac{1}{3}$

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$$

ולאחר שהצגנו את $\frac{x}{x^3-1}$ כסכום של שברים חלקיים, נוכל לחשב את האינטגרל שלה:

$$\int\left[\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}\right]dx$$

כדי לחשב את $\int\frac{1}{3(x-1)}dx$ נשתמש בנוסחה שראינו בכיתה: $\int\frac{1}{(x+a)^k}dx=\begin{cases}ln\mid x+a\mid & k=1\\ \frac{1}{1-k}(x+a)^{1-k} & k>1\end{cases}$ ונקבל: $\int\frac{1}{3(x-1)}dx=\frac{1}{3}ln\mid x-1\mid+C$ (אפשר פשוט לעשות החלפת משתנה $t=x-1$ ואז $dt=dx$ ולחשב את האינטגרל, ככה בעצם הגיעו לנוסחה הזו)

לכן נשאר לנו לחשב את $\int\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$: גם כאן נשתמש בנוסחה שראינו בכיתה $\int\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^k}dx=\begin{cases}ln\mid x^2+ax+b\mid & k=1\\ \frac{1}{1-k}(x^2+ax+b)^{1-k} & k>1\end{cases}$ *, נסדר את הפונקציית האינטגרנד (פונק' שבתוך האינטגרל) כדי שנוכל להשתמש בנוסחה: קודם כל נכפיל ונחלק ב 2 ונקבל $\int\frac{2x-2}{6(x^2+x+1)}dx$ אבל כדי שנוכל להשתמש בנוסחה אנחנו נרצה שבמונה יתקבל ביטוי $2x+1$ (בדוגמה שלנו $a=1$)

$$\int\frac{2x-2}{6(x^2+x+1)}dx=\int\frac{2x+1-3}{6(x^2+x+1)}dx=\int\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}dx-3\int\frac{1}{6(x^2+x+1)}dx$$

ואז האינטגרל הראשון שווה ל: $\int\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}dx=\frac{1}{6}ln\mid x^2+x+1\mid+C$ לפי הנוסחה (אפשר כמו מקודם לעשות שינוי משתנה $t=x^2+x+1$ ואז $dt=(2x+1)dx$ ואז לחשב את האינטגרל, בדרך זו קיבלו את הנוסחה*)

נשאר לנו לחשב את $-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$, בשביל זה נשתמש בשיטת השלמה לריבוע, נשלים את המכנה לריבוע $-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx\Longleftarrow x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right]}$ ועכשיו נוכל לעשות החלפת משתנה: $t=\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ ואז $dt=\frac{2}{\sqrt{3}}dx$ נציב את זה באינטגרל ונקבל:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=-\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}arctan(t)+C=-\frac{\sqrt{3}}{3}arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+C$$

נחבר את כל האינטגרלים שחישבנו ונקבל:

$$\int\frac{x^4}{1-x^3}dx=-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}ln\mid x^2+x+1\mid+\frac{1}{3}ln\mid x-1\mid-\frac{\sqrt{3}}{3}arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+C$$