נכתב על ידי נועם יערי

משפט לופיטל

יהי $\lambda \in \{0,\infty\}$, $a \in \mathbb{R} \cup \infty$.. יהיו פונקציות f,g גזירות בסביבה מנוקבת של a ומקיימות שם:

א. $g'(x) \neq 0$ לכל

ב. $f(x).\,g(x) \overset{x\to a}{\to} \lambda$

ג. $\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{x\to a}{\to} b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

אזי: $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to a}{\to} b$.

דוגמה

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(e-x) + (x-1)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\frac{(e^x - e^{-x})'}{\big(\log(e-x) + (x-1)\big)'} = \frac{\overbrace{e^x + e^{-x}}^{\to 2}}{\underbrace{\frac{-1}{e-x} + 1}_{\to 1-\frac{1}{e}}} \overset{x\to 0}{\to} \left(\frac{2}{1-\frac{1}{e}}\right) = \boldsymbol{\frac{2e}{e-1}}$$

מלופיטל, זה גם הגבול המקורי.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

במקרה הזה לופיטל לא עוזר:

$$\frac{\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)'}{\sin x'} = \frac{\overbrace{\left(2x \cdot \sin\frac{1}{x}\right)}^{\to 0} + \overbrace{\left(\cos\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot x^2}^{\text{לא מתכנס}}}{\underbrace{\cos x}_{\to 1}}$$

אך אפשר לנסות ישירות:

$$\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \left(\frac{x}{\sin x}\right)_{\overset{x\to 0}{\to} 1} \cdot \left(x \cdot \sin\frac{1}{x}\right)_{\overset{x\to 0}{\to} 0}$$

הערה

לופיטל נכון גם לגבולות חד צדדיים.

הוכחת המשפט

הוכחת המשפטים לגבולות החד צדדיים זהה לרגילים.

$\lambda = 0$ (כלומר $\frac{0}{0}$), a ממשי:

אם יש אי רציפות ב $-a$ ל $-f$ או g אז היא סליקה, כי מ – ב' $f(x), g(x) \overset{x\to a}{\rightarrow} 0$. לכן
$f(a) = g(a) = 0$

(הערה: $g'(x) \neq 0$ בסביבה המנוקבת ולכן מרול $g(x) \neq 0$ בסביבה המנוקבת של a)

ממשפט הערך הממוצע המוחלט (קושי), לכל x בסביבה המנוקבת יש $c(x)$ בין x ל $-a$.

$$\frac{f(x) - \overbrace{f(a)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{f'\big(c(x)\big)}{g'\big(c(x)\big)}$$

$a \overset{x\to a}{\rightarrow} c(x) \neq a$ לכן:

$\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \overset{x\to a}{\rightarrow} b$ לכן $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to a}{\rightarrow} b$

$\lambda = 0, a = \infty$

כאן הכל מתקיים בסביבה מנוקבת של ∞ כלומר קרן (α, ∞). אפשר להניח $\alpha > 0$ (הגדלת α כך תקטין את הסביבה).

$\left\{\frac{1}{x} : x \in (\alpha, \infty)\right\} = \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ סביבה ימנית של 0.

נגדיר $\tilde{f}, \tilde{g}$ על $(0, \frac{1}{\alpha})$ על ידי:

$$\tilde{f}(t) \coloneqq f\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\tilde{g}(t) \coloneqq g\left(\frac{1}{t}\right)$$

$\tilde{f}'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)$ ובדומה עבור $\tilde{g}$, בפרט גזירות ב - $(0, \frac{1}{\alpha})$. $\tilde{g}'(t) \neq 0$ שם.

$$\lim_{t\to 0^+} \tilde{f}(t) = \lim_{t\to 0^+} f\left(\underbrace{\frac{1}{t}}_{\to\infty}\right) = 0$$

וכן עבור $\tilde{g}$.

$$\frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} \overset{\substack{t\to 0^+ \\ (\frac{1}{t}\to\infty)}}{\longrightarrow} b$$

מלופיטל, במקרה שהוכח (גרסה חד צדדית: $a = 0^+$),

$$\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} \overset{t\to 0^+}{\to} b$$

לכן,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)}{g\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)} \overset{\substack{x\to\infty \\ \left(\frac{1}{x}\to 0^+\right)}}{\to} b$$

$a \in \mathbb{R}, \lambda = \infty$

(המקרה $a = \infty$ ינבע כמו קודם)

(הערה: $g(x) \to \infty$, לכן $g(x) \neq 0$ בסביבה מספיק קטנה של a^+)

צ"ל $b \overset{x\to a}{\to} \frac{f(x)}{g(x)}$. נשתמש באפיון ע"י סדרות. תהי נתונה $a \searrow x_n$ סדרה בסביבה הנתונה של a.

ניקח סדרה $0 \searrow a_n < x_n$ בסביבה, כך שמתקיים:

$$\frac{\max\{|f(a_n)|, |g(a_n)|\}}{g(x_n)} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

(נראה אחר כך שיש).

$$\frac{f(x_n) - f(a_n)}{g(x_n) - g(a_n)} \overset{\text{משפט ערך ממוצע מוכלל}}{=} \frac{f'\big(c(n)\big)}{g'\big(c(n)\big)}$$

$a_{n\to a} < c_{n\to a_{\text{סנדוויץ'}}} < x_{n\to a} < a$, לכן $a \to c_n \neq a$.

לכן $b \to \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$

$$b \leftarrow \frac{f(x_n) - f(a_n)}{g(x_n) - g(a_n)} = \frac{\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - \overbrace{\frac{\big(f(a_n)\big)}{g(x_n)}}^{\to 0}}{1 - \underbrace{\frac{g(a_n)}{g(x_n)}}_{\to 0}}$$

לכן $b \to \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$.

■

טענת עזר להוכחה הקודמת:

תהי h מוגדרת בסביבה ימנית של a ונניח g מוגדרת שם ומקיימת $\infty \overset{x\to a^+}{\leftarrow} g(x)$.

תהי $a \searrow x_n < a$ אזי יש סדרה $a \searrow a_n < x_n$ בסביבה כך ש - $\frac{h(a_n)}{g(x_n)} \to 0$

הוכחה:

ניקח a_1 כלשהי בסביבה. $g(x_n) \to \infty$ לכן יש m_1 שממנו ואליך, $h(a_1) < g(x_n)$.

עבור $k > 1$ נקבע $a_k = x_k + \frac{1}{k}$. יש m_k שממנו $k \cdot h(a_k) < g(x_n)$

$\mathbb{N}$	$1, \cdots, m_1 - 1, m_1, \cdots, m_2 - 1$	$m_2, \cdots, m_3 - 1$	$m_3, \cdots, m_4 - 1$
a_n	$b_1, \cdots, b_1, b_1, \cdots b_1$	$b_2, \cdots, b_2$	$b_3, \cdots, b_3$

ובאופן זה נמשיך.

נגדיר את הסדרה a_n כך:

יהי k כך ש - $m_k \le n \le m_{k+1}$ אז $a_n := b_k$ אז $h(a_n) = h(b_k)$

$$k \cdot h(a_n) = k \cdot h(b_k) < g(x_n)$$

$$\Rightarrow \frac{h(a_n)}{g(x_n)} < \frac{1}{k} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

(כאשר $n \to \infty$, גם $k \to \infty$).

$"0 \cdot \infty"$: $"\frac{\infty}{\infty} =: \frac{1}{\infty} = 0 \cdot \infty = \frac{0}{0} = \frac{1}{0} \cdot 0"$

$" 1^{\infty}"$

$$\log(1^\infty) = \infty \cdot \log 1 = \infty \cdot 0$$

דוגמה:

$$(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}, x \to 0$$

$$\log\left((1+x)^{\frac{1}{\sin x}}\right) = \left(\frac{1}{\sin x}\right) \cdot \log(1+x) = \frac{\log(1+x)}{\sin x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \left(\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)_{\to 1}}{\cos x_{\to 1}}\right) \to 1$$

$$\Downarrow$$

$$(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} \to e^1 = e$$

$\blacksquare$