מתמטיקה בדידה | פתרון מבחן תש"ף של פרופ' רינות

ע"י יונתן סמידוברסקי 2022

שאלה 1

1. מצאו פסוק φ במשתנים A, B, C שטבלת האמת שלו היא כדלקמן:

A	B	C	φ
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

<u>פתרון</u> הרעיון הוא להגדיר פסוקים שיהיו נכונים אך ורק להצבות מסוימות של A, B, C שבהן $\varphi = T$.

(שורה 1) עבור $A = T, B = T, C = T$ ניקח $R_1 := (A) \wedge (B) \wedge (C)$

(שורה 2) עבור $A = T, B = T, C = F$ ניקח $R_2 := (A) \wedge (B) \wedge (\neg C)$

(שורה 4) עבור $A = T, B = F, C = F$ ניקח $R_3 := (A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)$

(שורה 6) עבור $A = F, B = T, C = F$ ניקח $R_4 := (\neg A) \wedge (B) \wedge (\neg C)$

כעת, הפסוק שאנו מחפשים הוא

$$\varphi := R_1 \vee R_2 \vee R_3 \vee R_4 = [(A) \wedge (B) \wedge (C)] \vee [(A) \wedge (B) \wedge (\neg C)] \vee [(A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)] \vee [(\neg A) \wedge (B) \wedge (\neg C)]$$

אשר מקבל ערך אמת T בשורות הרצויות ו-F בכל השאר.

שאלה 2

2. נגדיר יחס R מעל הקבוצה $A := \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, כדלקמן:

לכל $a,b \in A$, aRb אמ"מ ל-a יש אותה קבוצת מחלקים ראשוניים כמו ל-b.

למשל, מתקיים $36\ R\ 18$, ולא מתקיים $18\ R\ 9$.

א. הוכיחו כי R מהווה יחס שקילות מעל A.

ב. מצאו תיאור של מחלקת השקילות של 77.

ג. חשבו את העוצמה של קבוצת המנה $A/_R$.

(א)

רפלקסיביות- יהי $a \in A$, ברור כי לa יש אותה קבוצת מחלקים ראשוניים כמו לעצמו.

סימטריות- יהיו $a,b \in A$ בהינתן aRb מההגדרה, יש להן אותה קבוצת מחלקים ראשוניים וברור שמתקיים גם לכיוון השני bRa

טרנזיטיביות- יהיו $a,b,c \in A$ כך ש$aRb \wedge bRc$ נוכיח aRc. נסמן בD את קבוצת המחלקים הראשוניים של A.

מהנתון קבוצת המחלקים הראשוניים של B היא D וכמו כן גם של C. סה"כ לa ולb אותה קבוצת מחלקים ראשוניים וסיימנו

(ב)

נראה כי

$$[77]_R := \{11^m * 7^n | m,n \in A\}$$

בעזרת הכלה דו כיוונית.

מצד אחד $\subseteq$: יהי $a \in [77]_R$, לכן מהגדרה $(a,77) \in R$ ויש להן אותה קבוצת מחלקים ראשוניים כלומר $\{11,7\}$

והמספרים היחידים שמקיימים זה הם איברים מהסוג $11^m * 7^n$ וסיימנו.

ובכיוון השני $\supseteq$: כל איבר בקב' זו מקיים כי אלה המחלקים הראשוניים היחידים שלו כמו של 77.

(ג)

נראה כי

$$|A/_R| = \aleph_0$$

מצד אחד, לכל מס' ראשוני $p \in P$ מתקיים $[p]_R = \{p^n | n \in A\}$ וידוע כי $|P| = \aleph_0$

אז, $|A/_R| \geq \aleph_0$. מצד שני $|A| = \aleph_0$ ולכן $|A/_R| \leq \aleph_0$. לכן לפי קנטור-שרדר-ברנשטיין $|A/_R| = \aleph_0$.

שאלה 3

3. נניח A קבוצה אינסופית. נסמן ב-$\mathcal{F}$ את קבוצת כל יחסי הסדר (חלש) מעל A.
נניח כי C שרשרת מקסימלית בקס"ח $(\mathcal{F},\subseteq)$. נסמן $R^* := \bigcup \mathcal{C}$. הוכיחו או הפריכו:

א. $R^* \neq \emptyset$.

ב. (A,R^*) קבוצה סדורה חלקית במובן החלש.

ג. (A,R^*) קבוצה סדורה קווית.

ד. (A,R^*) קבוצה סדורה היטב.

(א)

__**הוכחה**__ Aאינסופית ובפרט לא ריקה, וקיים בה איזשהו איבר $a \in A$. מתקיים כי לכל יחס סדר חלש R, בפרט בF וכן בC הוא רפלקסיבי.
כלומר $(a,a) \in R$ כעת מתקיים $(a,a) \in C$ וכן $(a,a) \in R^*$.

(ב)

__**הוכחה**__

__רפלקיסיביות__ לכל $a \in A$ מתקיים $(a,a) \in R \in F$ וכן $(a,a) \in R^*$

__אנטי-סימטריות__ יהיו $a,b \in R^*$ כך ש $(b,a) \in R \wedge (a,b) \in R^* \Leftarrow (a,b),(b,a) \in \cup C$ כלומר קיים $R' \in C$ כך ש$(a,b),(b,a) \in R'$.
משום שC שרשרת מקסימלית מבחינת הכלה מתקיים לכל $R \in C$ כי $(a,b),(b,a) \in R$ וכל Rכזה הינו יחס סדר- ובפרט אנטי סימטרי.
לכן לכל $R \in C$ מתקיים $(b,a),(a,b) \in R$
ומאנטי סימטריות $a = b$.

__טרנזיטיביות__ יהיו $a,b,c \in R^*$ כך ש $(b,c) \in R \wedge (a,b) \in R^* \Leftarrow (a,b),(b,c) \in \cup C$ כלומר קיים $R' \in C$ כך ש$(a,b),(b,c) \in R'$.
משום שC שרשרת מקסימלית מבחינת הכלה מתקיים לכל $R \in C$ כי $(a,b),(b,c) \in R$ וכל Rכזה הינו יחס סדר- ובפרט טרנזיטיבי.
לכן לכל $R \in C$ מתקיים $(b,c),(a,b) \in R$
ומטרנזיטיביות $(a,c) \in R^*$.

(ג)

__**הפרכה (מתגבור עם עידו פדמן)**__ נניח בשלילה כי R^* אינה סדורה קווית, כלומר קיימים $a,b \in A$ כך ש $a \not R b \wedge b \not R a$. כעת נגדיר

$$R' := trcl(\{(a,b)\} \cup R^*)$$

ומתקיים (A,R') קס"ח: רפלקיסיביות ואנטי- סימטריות קל להוכיח כי $R^* \subseteq R'$, וטרנזיטיביות מיידית. כעת C שרשרת מקסימלית אבל $R^* \subseteq R'$
ולכן $C \subset \{R'\} \cup C$ בסתירה.

(ד)

__**הפרכה (מתגבור עם עידו פלדמן):**__ נגדיר $A := \mathbb{N}$, $R_0 := I_A$

ואז $R_{n+1} := R_n \cup \{(n+1,i) | i \in \mathbb{N}\}$

שאלה 4

4. נניח A קבוצה לא-ריקה ו-$f: A \to A$ פונקציה.

לכל n טבעי חיובי, נסמן ב-f^n את הפונקציה $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ פעמים}}$. הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע אמ"מ לכל מספר טבעי $n > 3$ מתקיים f^n חח"ע.

ב. f על אמ"מ קיים מספר טבעי $n > 3$ כך ש-f^n על.

(א)

<u>הוכחה (מתגבור עם עידו פלדמן)</u>

$\Rightarrow$: נניח בשלילה שf אינה חח"ע. כלומר קיימים $a, b \in A$ כך ש$a \neq b$ וכן $f(a) = f(b)$. אבל נראה למשל שעבור $n = 4$ מתקיים f^4 לא חח"ע.
כעת $f^4(a) = f^3(f(a)) = f^3(f(b)) = f^4(b)$ בסתירה.
$\Leftarrow$: הרכבת פונקציות חח"ע היא חח"ע.

(ב)

<u>הוכחה (מתגבור עם עידו פלדמן)</u>

$\Leftarrow$: אם f על אז $f * f * f ... * f$ על- משפט מהרצאה.
$\Rightarrow$: אם $f * f * f ... * f$ על אזי f על- משפט מהרצאה.

שאלה 5

5. חשבו את העוצמות הבאות:

א. $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$.

ב. $|\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}|$.

(א)

הוכחנו בהרצאה שעבור קבוצות זרות A, B מתקיים $|A \cup B| = a + b$
וכן $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. לכן
$\aleph = |R| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| + \aleph_0$
וסה"כ $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \aleph_0$.

(ב)

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}|$$

ומתקיים $\aleph_0 = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}| + |\mathbb{Z}| = max\{|\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}|, |\mathbb{Z}|\} = max\{|\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}|, \aleph_0\}$
לכן $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} = \aleph_0$.

שאלה 6

6. חשבו את הסגור הטרנזיטיבי של $\{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ וקבעו האם הזוג הסדור $(1, 3)$ שייך אליו.

פתרון נסמן את הקבוצה בD ונראה כי הסגור הטרנזיטיבי הינו

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i$$

כאשר A_i מוגדר על ידי

$$A_i = \{(a, 2^i a) | a \in \mathbb{Z}\}$$

יהי $a \in \mathbb{Z}$ כעת $(a, 2a) \in D$ אבל $2a \in \mathbb{Z}$ ולכן $(2a, 4a) \in \mathbb{Z}$ וכן הלאה באינדוקציה נקבל כי לכל $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ מתקיים מטרנזיטיביות $(a, 2^i a) \in \cup_{i=1}^{\infty} A_i$.
וכן $(1, 3) \notin trcl(D)$