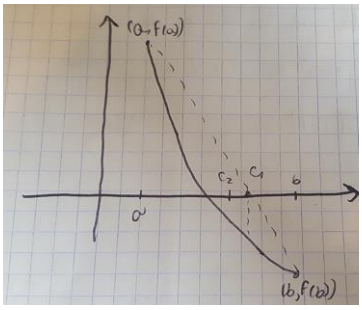
תרגול 4

17 יולי, 2016

שיטת המיקום השגוי $(Regula - Falsi)$



שיפוע של ישר -

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

משוואות ישר עם שיפוע ונקודה -

$$y - f(b) = m(x - b)$$

הישר חותך את הנקודה $(c, 0)$. ניצב אותה -

$$y = 0 => 0 = f(b) + m(c - b)$$

$$c = b - \frac{f(b)}{m} = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

$$=> c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

השלבים הבאים זהים לאלה של שיטת החצייה.

דוגמה:

נתונה הפונקציה - $y = xsin(x) - 1$ בקטע $[0,2]$.

נבנה טבלת איטרציות –

k = מספר איטרציות	a_k	$c_k = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	b_k	$f(c_k)$
1	0	1.09975017	2	-0.002001 $(-)$
2	1.09975017	1.12124074	2	0.00983 $(+)$
3	1.09957017	1.11416120	1.2124074	

תרגול 4 **17 יולי, 2016**

שיטת נקודת שבת

אם $f(x_n) = x_{n+1}$, נקודת שבת של f היא x כך ש - $f(x) = x$.

שאלה - אם x היא נקודת שבת, האם היא יציבה? אם אני מתחיל קרוב ל – x, האם הסדרה מתכנסת ל- x?

מטור טיילור -

$$f(x+\epsilon) = \underbrace{\underbrace{f(x)}_{=x}}_{\text{נקודת שבת}} + \epsilon * f'(x) + o(|\epsilon|)$$

$$f(x+\epsilon) \approx x + \epsilon * f'(x)$$

לכן –

$$|f(x+\epsilon) - x| \underbrace{\leq}_{\text{אש"מ הפוך}} |\epsilon| * |f'(x)|$$

אנחנו רואים שכאשר $|f'(x)| < 1$ אזי עבור ϵ מספיק קטן נקבל ש –

$$|f(x+\epsilon) - x| < |\epsilon|$$

כלומר מתקרבים ל – x.

$|f'(x)|$ נקרא המכפיל בנקודת השבת של x. אם נסמן - $\lambda = |f'(x)|$ אזי:

- אם $\lambda < 1$ אז נקודת השבת יציבה.
- אם $\lambda > 1$ אז נקודת השבת לא יציבה.
- אם $\lambda = 1$ אז נקודת השבת בעלת יציבות גבולית (יתכן שיהיה יציב ויתכן שלא).
- אם $\lambda = 0$ אז נקודת השבת סופר יציבה (מאוד יציבה).

הבעיה: מחפשים קירוב לפתרון של המשוואה $f(x) = 0$.

השיטה: מוצאים פונקציה $g(x)$ כך שמתקיים - $g(x) = x$ בשורש של f.

אלגוריתם: בשלב ה - n מחשבים את הקירוב $x_{n+1} = g(x_n)$. קיימים משפטים המבטיחים התכנסות של x_n לשורש. הכי שימושי - $|g'(x)| < 1$ בסביבת השורש.

דוגמה:

מצאו נוסחת איטרציה למציאת שורש של $f(x) = x^5 - xe^x + \sin(x)$.

נוסחת איטרציה באופן כללי - $x_{n+1} = g(x_n)$.

נסתכל על המשוואה $f(x) = 0$, כלומר –

$$x^5 - xe^x + \sin(x) = 0$$

$$x(x^4 - e^x) = -\sin(x)$$

$$x = \frac{\sin(x)}{e^x - x^4}$$

נסמן - $g(x) = \frac{\sin(x)}{e^x - x^4}$. לפי הנ"ל $f(x) = 0 <=> g(x) = x$.

ידוע שהפתרון נמצא בסביבה של 0. לכן נחשב את הנגזרת של g בסביבה זו ונראה ש - $|g'(x)| < 1$ סביב 0.

לכן - $x_{n+1} = g(x_n)$ תתכנס לשורש של f אם נבחר x_0 <u>בסביבה מספיק קטנה</u> של השורש.

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפונקציה $f(x) = x + ln(x)$. ידוע שיש לה שורש בסביבת 0.5. מצאו נוסחת איטרציה מתכנסת.

<u>פתרון:</u>

<u>ניסיון 1</u> -

$$x_{n+1} = -\ln(x_n)$$

$$g(x) = -\ln(x)$$

האם יש התכנסות?

$$g'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$=> |g'(0.5)| = 2$$

g' רציפה בסביבת 0.5 ולכן בסביבת 0.5 - $|g'(x)| \approx 2$. לכן $|g'(x)| > 1$ ולפי המשפט האיטרציה לא מתכנסת.

<u>ניסיון 2</u> -

$$x + \ln(x) = 0$$

$$-x = \ln(x) \quad /e^\wedge$$

$$e^{-x} = x$$

הנוסחה - $x_{n+1} = e^{-x_n}$.

$$=> g(x) = e^{-x}$$

$$g'(x) = -e^{-x}$$

$$=> |g'(0.5)| = e^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6$$

g' רציפה ולכן בסביבת 0.5 מתקיים - $|g'| < 1$ ולכן האיטרציה מתכנסת.

<u>ניסיון 3</u> –

$$x + \ln(x) = 0$$

$$-x = \ln(x) \quad /e^\wedge$$

$$e^{-x} = x \quad /+x$$

$$e^{-x} + x = x + x = 2x \quad /:2$$

$$\frac{e^{-x} + x}{2} = x$$

ולכן –

$$g(x) = \frac{e^{-x} + x}{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{e^{-x_n} + x_n}{2}$$

$$=> g'(0.5) \approx 0.2$$

ולכן האיטרציה מתכנסת.

■

<u>הערה:</u>

נשים לב שככל ש – $|g'|$ קטנה יותר , כך השיטה מתכנסת מהר יותר.

לכן מהתרגיל הקודם ניתן לומר <u>ששיטה 3 עדיפה על שיטה 2.</u>

<u>משפט:</u> תהי $x_{n+1} = g(x_n)$ נוסחה איטרטיבית שמתכנסת ל – z ומתקיים $g(z) = z$, כך ש- $g(x)$ גזירה p פעמים בסביבה של z ו -

$$\begin{cases} g'(z) = g''(z) = \cdots = g^{(p-1)}(z) = 0 \\ g^{(p)}(z) \neq 0 \end{cases}$$

אזי עבור x_0 קרוב ל – z, סדר ההתכנסות של השיטה הוא p, וקבוע ההתכנסות:

$$c = \frac{\left|g^{(p)}(z)\right|}{p!}$$

תרגיל:

נתונה הפונקציה - $f(x) = x^3 + 2x - 3$.

סעיף א' -

מצא איטרציה שמתכנסת עברו השורש 1, ומצא את סדר וקצב ההתכנסות.

פתרון:

$$x^3 + 2x - 3 = 0$$

$$2x = 3 - x^3$$

$$x = \frac{3 - x^3}{2}$$

נגדיר - $g(x) = \frac{3-x^3}{2}$.

$$=> g'(x) = -\frac{3x^2}{2}$$

$$|g'(1)| = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} > 1$$

לכן קיבלנו ש - $(g'(z) = 0)$ $p = 1$ ובנוסף –

$$c = \frac{g'(z)}{1} = \frac{3}{2} > 1$$

והשיטה מתבדרת.

כעת, ננסה למצוא שיטה מתכנסת –

$$x(x^2 + 2) = 3 => x = \frac{3}{x^2 + 2}$$

$$=> g(x) = \frac{3}{x^2 + 2}$$

$$g'(x) = 3 * \frac{-2x}{x^2 + 2} => g'(1) = -\frac{2}{3}$$

מכאן נקבל שהשיטה אכן מתכנסת ובנוסף –

$$p = 1\,, c = \frac{2}{3}$$

התכנסות לינארית.

■

<u>סעיף ב'</u> –

מצא את הסדר לקצב לאותה פונקציה עבור משוואת האיטרציה הבאה:

$$\varphi(z) = \frac{2x^3 + 3}{3x^2 + 2}$$

<u>פתרון:</u>

$$\varphi'(x) = \frac{6x^2(3x^2 + 2) - 6x(2x^3 + 3)}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{6x^4 + 12x^2 - 18x}{(3x^2 + 2)^2}$$

נציב - $x = 1$:

$$\varphi'(1) = 0$$

ולכן נגזור שוב את הפונקציה –

$$\varphi''(x) = \frac{(24x^3 + 24x - 18)(3x^2 + 2)^2 - 2 * 6x * (3x^2 + 2)(6x^4 + 12x^2 - 18x)}{(3x^2 + 2)^4}$$

ונציב שוב -

$$\varphi''(1) = \frac{30}{25}$$

ולכן –

$$p = 2$$

$$c = \frac{|\varphi''(1)|}{2!} = \frac{30}{25 * 2} = \frac{3}{5}$$

■

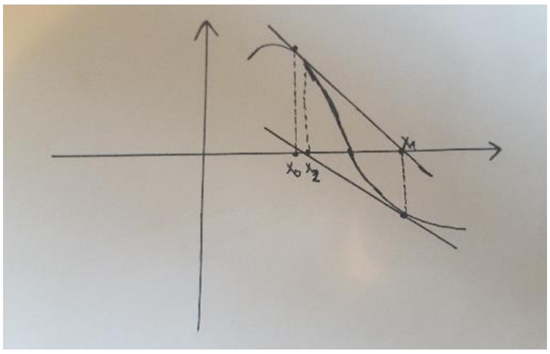
תרגול 4

17 יולי, 2016

<u>שיטת ניוטון-רפסון $(Newton - Raphson)$</u>

נוסחת איטרציה –

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



<u>נראה איך הגענו לנוסחה זו:</u>

בחרנו את x_n:

$$m = f'(x_n) \quad \text{שיפוע המשיק}$$

משוואת המשיק –

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

נמצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה – x, כלומר $y = 0$:

$$0 - f(x_n) = f'(x_n) * \underbrace{x}_{\substack{x_{n+1} \\ \text{נקודה חדשה}}} - f'(x_n) * x_n$$

$$=> x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

<u>דוגמה:</u>

נפתור את המשוואה הבאה:

$$f(x) = x + \ln(x) = 0$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = 0$$

<u>טיפ:</u> בהינתן משוואה לא לינארית יש למצוא את הקטע שבו נמצא השורש (לבצע 2-3 איטרציות בשיטה פשוטה כלשהי, לדוגמה שיטת ה – $bisection$).

נבחר $x_0 = 1.075$ –

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.075 - \frac{1.075 + \ln(1.075)}{1 + \frac{1}{1.075}} = 0.4806$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.4806 - \frac{0.4806 + \ln(0.8046)}{1 + \frac{1}{0.4806}} = 0.56245$$

אם באיטרציה הבאה הספרה ה-4 לא השתנתה ,כלומר 0.5624 , אז זה השורש.