.1

א. מנוסחת קושי-הדמר נקבל $1 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}}$ = R. נציב $x=-1$ ונקבל את הטור

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ שמתכנס אם ורק אם $p>0$. אמנם, אם $p>0$ נקבל שטור זה הינו טור

לייבניץ. אם $p\le 0$ לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות טור כלומר

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\neq 0$ והטור מתבדר. נציב $x=1$ ונקבל את הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ שמתכנס אם

ורק אם $p>1$.

ב. לפי נוסחת דלמבר נקבל: $R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{(n!)^2(2n+2)!}{(2n)!\,[(n+1)!]^2}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)2}{n+1}=4$

.2

א. לפי קושי אדמר $R=\sqrt[n]{n^3}=1$ **ועבור** $x=\pm 1$ **נקבל את הטור** $\sum\pm n^3$ **שברור שאינו מתכנס.**

ב. האיבר הכללי הוא: $a_n=\begin{cases}0 & n\ odd\\ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} & n\ even\end{cases}$. **לפי קושי אדמר**

$\lim\limits_{n\to\infty}sup\sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!}}=0\Rightarrow R=\infty$

ג. נשים לב ש- $cos(\frac{n\pi}{3})=0.5,\ -0.5,\ -1,-0.5,0.5,1,0.5,-0.5,-1...$. **כלומר,**

$1\leftarrow\sqrt[n]{(0.5)}\le\sqrt[n]{cos(\frac{n\pi}{3})}\le\sqrt[n]{1}\to 1\Rightarrow R=1$

עבור $x=\pm 1$ **נקבל ש-** $\lim\limits_{n\to\infty}cos(\frac{n\pi}{3})\neq 0$ **ולכן הטור מתבדר.**

ד. ע"י דלמבר נקבל $R=0$ כלומר יש התכנסות רק במרכז הטור (כלומר תחום ההתכנסות הוא הנקודה x=0).

ה. ע"י קושי מקבלים שצריך לחשב את

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ln(n)}{n^{\frac{ln(n)}{n}}}$$

נטפל קודם במכנה ע"י

$$e^{ln\left(n^{\frac{ln(n)}{n}}\right)}=e^{\frac{ln(n)}{n}ln(\text{n})}=e^{\frac{ln^2(\text{n})}{n}}$$

המעריך שואף לאפס לפי סדרי גודל, לכן סה"כ המכנה של הגבול המקורי שאנחנו מחשבים הוא

$$e^0=1$$

כלומר הגבול הכולל הוא אינסוף, ורדיוס ההתכנסות הוא 0, כלומר תחום ההתכנסות הוא מרכז הטור הנקודה x=0.

3. א. ע"י דלמבר מקבלים ש-$R=\infty$ כלומר תחום ההתכנסות הוא כל המספרים הממשיים. לכן יש התכנסות במ"ש בכל קטע $[a,b]$ ובפרט ב-$[-100,100]$ ובפרט ב-$(-100,100)$. (התכנסות במ"ש בקטע גוררת כמובן התכנסות במ"ש בכל תת-קטע)

ב. הטור לא מתכנס במ"ש בכל R, כי

$$sup|r_n| \geq sup|a_{n+1}| = sup\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \infty$$

כלומר לפי מבחן ה-lim-sup (קיבלנו גבול שאיננו אפס) הטור לא מתכנס במ"ש בכל R.

לחלופין אפשר להראות באופן יותר כללי שכל טור חזקות לעולם איננו מתכנס במ"ש בכל הממשיים אלא אם כל המקדמים מתאפסים החל ממיקום מסוים (כלומר אלא אם הוא פולינום).

4. נבדוק התכנסות בנקודה $x = 1$: מקבלים את הטור

$$\sum a_n$$

שנתון שהוא מתבדר. לכן אין התכנסות בנקודה $x = 1$, וכיוון שמרכז הטור הוא $x = 0$, מקבלים שרדיוס ההתכנסות R מקיים

$$R \leq 1$$

מצד שני אם נציב $x = -1$, נקבל את

$$\sum (-1)^n a_n$$

וכיוון שלפי הנתון a_n חיובית מונוטונית יורדת ומתכנסת לאפס אז זה טור לייבניץ ולכן הוא מתכנס. לכן רדיוס ההתכנסות מקיים גם

$$R \geq 1$$

וסה"כ מתקיים $R = 1$.

את הקצוות $x = 1, x = -1$ כבר בדקנו וראינו שמתכנס ב-1 ומתבדר ב-1. לכן סה"כ תחום ההתכנסות הוא

$$[-1,1)$$