

# חשבון אינפיניטסימלי 2 | תש"ע מועד א'

פתרון המבחן | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

מרצה: שחר נבו  
(לפי מיקוד תשפ"ב)

## שאלה 1

(ב) חשב  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \cot(x) - \frac{1}{x} \right)$

(סעיף ב')

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \cot(x) - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cot(x) - \frac{1}{x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \cot(x) - 1}{x^2} \right) \end{aligned}$$

נראה שהמכנה והמונה שואפים לאפס, ונפעיל לופיטל.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot(x) - 1 = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} \right) - 1$$

נשתמש בלופיטל (המקרה " $\frac{\infty}{\infty}$ "):

$$= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{-1}{\sin^2(x)}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} \right) - 1 = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{\sin^2(x)} \right) \right) - 1$$

נשתמש בלופיטל פעמיים (המקרה " $\frac{0}{0}$ "):

$$\begin{aligned} &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x}{2\sin(x)\cos(x)} \right) \right) - 1 = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x}{\sin(2x)} \right) \right) - 1 \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{2\cos(2x)} \right) \right) - 1 = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos(2x)} \right) \right) - 1 = \frac{1}{1} - 1 = 0 \end{aligned}$$

נפעיל לופיטל על הגבול שלנו,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \cot(x) - 1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{\sin(x)\cos(x) - x}{\sin^2(x)}}{2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)\cos(x) - x}{2x\sin^2(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{\sin(2x)}{2} - x}{2x\sin^2(x)} \right) \end{aligned}$$

נשים לב שוב

$$(\sin(x)\cos(x) - x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} (0 \cdot 1 - 0) = 0$$

$$(2x\sin^2(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

ולכן נשתמש בלופיטל

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{2\sin^2(x) + 2x\sin(2x)}$$

שוב לופיטל

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin(2x)}{4\sin(2x) + 4x\cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(2x)}{2\sin(2x) + 2x\cos(2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\cos(2x)}{4\cos(2x) + 2\cos(2x) - 4x\sin(2x)} = \frac{-2}{4 + 2} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

## שאלה 2

תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $[0, 1]$  וגזירה ב-  $(0, 1)$ , המקיימת  $f(0) = 0, f(1) = 1$  וכן  $f'(x) \leq 3x^2$  לכל  $0 < x < 1$ . הוכח  $f(x) = x^3$ .

### (פתרון)

נגדיר  $g(x) := f(x) - x^3$ ,  
נראה שהפונקציה קבועה על  $[0, 1]$ .

$$g'(x) = f'(x) - 3x^2 \leq 3x^2 - 3x^2 = 0$$

קיבלנו שהפונקציה יורדת או קבועה.  
נשים לב כי

$$g(0) = f(0) - 0 = 0, g(1) = f(1) - 1 = 0$$

ולכן הפונקציה קבועה על  $[0, 1]$  וסך הכל  $f(x) = x^3$ .

■

### שאלה 3

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-5x+14} dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$$

### (סעיף א)

ניעזר בהצבה הטריגונומטרית, נסמן  $a := \sqrt{3}$ . נציב הצבה הפוכה  $x = a \sin(t)$  עבור  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (מונוטונית ממש, גזירה ועל).

$$t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$(dx = a \cos(t))$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= \int \sqrt{a^2-a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos(t) dt = \int a^2 \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t) dt \\ &= \int a^2 \sqrt{\cos^2(t)} \cdot \cos(t) dt = \int a^2 \cdot \cos^2(t) dt \\ &= a^2 \int \frac{\cos(2t)+1}{2} dt = a^2 \left( \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{2} t \right) + c = a^2 \left( \frac{2 \sin(\arcsin(\frac{x}{a})) \cdot \cos(\arcsin(\frac{x}{a}))}{4} + \frac{\arcsin(\frac{x}{a})}{2} \right) + c \\ &= a^2 \left( \frac{\frac{x}{a} \cdot \cos(\arcsin(\frac{x}{a}))}{2} + \frac{\arcsin(\frac{x}{a})}{2} \right) + c \end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\cos(\arcsin(\frac{x}{a})) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(\frac{x}{a}))} = \sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$$

ולכן סה"כ

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{ax\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}}{2} + \frac{a^2 \cdot \arcsin(\frac{x}{a})}{2}$$

לכן,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2} dx &= \left[ \frac{x\sqrt{3 - x^2}}{2} + \frac{3 \cdot \arcsin(\frac{x}{\sqrt{3}})}{2} \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= \left( 0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \left( \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}} \end{aligned}$$

**(סעיף ב)**

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 5x + 14} dx = \int 1 + \frac{5x - 14}{x^2 - 5x + 14} dx$$

נגדיר  $t := x^2 - 5x + 14$  ונתקן את המונה להיות נגזרת של  $t$ ,

$$dt = (2x - 5)dx$$

$$dx = \frac{dt}{2x - 5}$$

לכן

$$= \int 1 + \frac{5x - 12.5}{x^2 - 5x + 14} + \frac{-1.5}{x^2 - 5x + 14} dx$$

פירקנו לשלושה אינטגרלים שאנחנו יודעים לפתור

$$\int 1 dx = x + c$$

$$\int \frac{5x - 7.5}{t} \cdot \frac{dt}{2x - 5} = \int \frac{2.5}{t} dt = 2.5 \log|t| + c = 2.5 \log|x^2 - 5x + 14| + c$$

ולבסוף,

$$\int \frac{-1.5}{x^2 - 5x + 14} dx$$

נביא למצב של  $t^2 + 1$ ,

$$x^2 - 5x + 14 = (x - 2.5)^2 + 7.75 = 7.75 \left( \frac{(x - 2.5)^2}{7.75} + 1 \right)$$

נגדיר  $t := \frac{x-2.5}{\sqrt{7.75}}$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{7.75}}$$

$$dx = \sqrt{7.75} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-1.5}{x^2 - 5x + 14} dx &= -1.5 \int \frac{1}{7.75(t^2 + 1)} \cdot \sqrt{7.75} dt = \frac{-1.5 \cdot \sqrt{7.75}}{7.75} \int \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{31}} \arctan \left( \frac{2(x - 2.5)}{\sqrt{4 \cdot 7.75}} \right) + c \end{aligned}$$

נקבל לבסוף,

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 5x + 14} dx = \boxed{x + 2.5 \log|x^2 - 5x + 14| - \frac{3}{\sqrt{31}} \arctan \left( \frac{2x - 5}{\sqrt{31}} \right) + c}$$

**(סעיף ג)**

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1 + x^2} dx$$

נציב

$$t := \arctan(x)$$

$$dt = \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$dx = (1 + x^2)dt$$

ונקבל,

$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \int \frac{t}{1+x^2} \cdot (1+x^2) dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\arctan^2(x)}{2} + c$$

ולבסוף,

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{\arctan^2(x)}{2} \right]_0^b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\arctan^2(b)}{2} \right) = \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

## שאלה 4

נגדיר  $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ .  
(א) הראו כי אם  $\alpha > 1$  אז הטור מתכנס במ"ש ב- $\mathbb{R}$   
(ב) הראו כי אם  $\alpha > 2$  אז ל- $f(x)$  נגזרת רציפה ב- $\mathbb{R}$

### (סעיף א)

נגדיר  $g_n(x) := \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ , ונקבל  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$  ונוכיח שהטור מתכנס במ"ש. ששתמש במבחן החסם של ויירשטראס. יהי  $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

ונניח כי  $\alpha > 1$ , ולכן  $\sum \frac{1}{n^\alpha} < \infty$  לכן קיבלנו התכנסות במ"ש של הטור  $\sum g_n(x)$ , כלומר  $f(x)$  מתכנס במ"ש ב- $\mathbb{R}$

### (סעיף ב)

ראשית, כל פונקציה  $f_n$  גזירה וצריך להראות שטור הפונקציות  $\frac{-\sin(nx)}{n^{\alpha-1}}$  מתכנס במ"ש (מבחן החסם של ויירשטראס), בנוסף עבור  $c = 0$ , נקבל שהטור  $\sum f_n(c)$  מתכנס וניתן להפעיל גזירה איבר איבר.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} (\cos(nx))' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \cdot (-n \sin(nx)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin(nx)}{n^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

ושוב לפי מבחן החסם של ויירשטראס, נניח  $\alpha > 2$  כלומר  $\alpha - 1 > 1$

$$\left| \frac{-\sin(nx)}{n^{\alpha-1}} \right| \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

כל  $x \in \mathbb{R}$ , וידוע כי  $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}} < \infty$  עבור  $\alpha > 2$  ולכן גם  $f'(x)$  מתכנסת במ"ש.

■

## שאלה 5

(א) מצאו רדיוס התכנסות  $r$  עבור הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n+2}} x^n$  ומצא את תחום ההתכנסות של הטור.

(ב) חשב הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log(x)^n}{n}\right)$

(סעיף א)

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{\left|\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n+2}}\right|}\right)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{\left|\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n+2}}\right|}\right)}$$

נחשב את הגבול במכנה, נראה שהוא 1.

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \cdot \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right) + \sqrt[n]{\left(n + \frac{1}{n}\right)^2}} \right)$$

נפעל לגבולות, כולם מתכנסים ולכן נסיק את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}} = 1$$

סך הכל

$$r = 1$$

ונותר לבדוק את הקצוות,  $x = \pm 1$ .

עבור  $x = 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^{n+2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n)^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(n+\frac{1}{n}-n-2)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2-\frac{1}{n}}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{2-\frac{1}{n}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2-\frac{1}{n+1}} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{1.5} < \infty$$

וקיבלנו התכנסות ממבחן ההשוואה.

עבור  $x = -1$ , מספיק להראות שהטור מתכנס בהחלט (המקרה  $x = 1$ ) וסיימנו.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n+2}} (-1)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n+2}} < \infty$$

לכן תחום ההתכנסות הוא  $[-1, 1]$ .

## (סעיף ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\log(x)^n}{n} \right) = ?$$

ידוע כי

$$\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{n+1}}{n+1} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

רדיוס ההתכנסות של הטור הוא 1,

$$r = \frac{1}{\limsup(\sqrt[n]{n})} = 1$$

ובנוסף עבור  $x = 1$ , מקבלים את ההרמוני, עבור  $x = -1$  מלייבניץ.

לכן תחום התכנסות  $[-1, 1)$ ,

כעת נרצה להציב  $\log(x)$  וצריך לשנות את תחום ההתכנסות

$$-1 \leq x < 1$$

$$\frac{1}{e} \leq \log(x) < e$$

ולכן מקבלים:

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

ונציב  $\log(x)$

$$-\log(1 - \log(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(x))^n}{n}$$

מקבלים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(x)^n}{n} = -\log(1 - \log(x))$$

בתחום ההתכנסות  $(\frac{1}{e}, e)$