אלגברה לינארית למהנדסים – תרגיל בית 1

תאריך הגשה: 04.04.2017

שדות

1. יהי F שדה. עבור $a,b\in F$ נסמן $a-b:=a+(-b)$.
הוכיחו את הטענות הבאות עבור איברים כלשהם a,b,c ב־F.

א. $-(a+b)=-a-b$.
ב. $a(b-c)=ab-ac$.
ג. אם $a,b\neq 0$, אזי $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$.
ד. חוק הצמצום לכפל: אם $ab=ac$ וכן $a\neq 0$ אזי $b=c$.
ה. אם $ab=0$ אזי $a=0$ או $b=0$.
ו. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
ז. אם $a^2=1$ אזי $a=1$ או $a=-1$ (רמז: העזרו בסעיף קודם).

2. נתבונן ב־$\mathbb{Q}$ שדה המספרים הרציונליים (כלומר השדה שאיבריו הם $\frac{a}{b}$ כאשר a,b מספרים שלמים ו־$b\neq 0$).
נגדיר $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\}$.
נגדיר פעולות חיבור $+$ וכפל $\cdot$ על איברי $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:
$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$
$(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$
הוכיחו כי $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הנ"ל הוא שדה.
מהו $(\sqrt{2})^{-1}$?

3. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות רשמו האם היא שדה. אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמא לאקסיומה שאינה מתקיימת.
א. $\mathbb{R}_+=\{a\in\mathbb{R}|a\geq 0\}$ עם פעולות החיבור והכפל הרגילות.
ב. $\mathbb{R}$ ביחס לפעולת הכפל הרגילה ופעולת החיבור שלהלן: $a\boxplus b=a+2b$.
ג. $\mathbb{R}$ ביחס לפעולת הכפל הרגילה ופעולת החיבור שלהלן: $a\boxplus b=2a+2b$.

מספרים מרוכבים

.4 כתבו את המספרים המרוכבים הבאים בצורה קרטזית (כלומר בצורה $x+yi$):

(א) $(6+3i)(3-2i)$

(ב) $(4-3i)^2$

(ג) $\frac{2-7i}{2+4i}$

(ד) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)^{10}$ (רמז: העזרו בצורה פולרית).

.5 עבור $z=x+yi\in\mathbb{C}$ (כאשר $x,y\in\mathbb{R}$) נגדיר את הצמוד המרוכב שלו להיות $\overline{z}=x-yi$, החלק הממשי $Re(z)=x$ והחלק המדומה $Im(z)=y$. עבור מספרים מרוכבים z,w הוכיחו:

(א) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$

(ב) $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

(ג) $\overline{\overline{z}}=z$

(ד) $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$

(ה) $z-\overline{z}=2i\mathrm{Im}(z)$

.6 תכונות הערך המוחלט: עבור $z=x+yi\in\mathbb{C}$ (כאשר $x,y\in\mathbb{R}$) נגדיר את הערך המוחלט שלו להיות $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. עבור מספרים מוכבים z,w הוכיחו:

(א) $|\overline{z}|=|z|$

(ב) $|z|=0$ אמ"ם $z=0$.

(ג) $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

.7 מצאו את כל הפתרונות של המשוואות הבאות:

(א) $z^6=6$

(ב) $e^z=1+i$

(ג) $-iz^2+(3-5i)z+7\frac{1}{2}=0$ (רמז: העזרו בנוסחת השורשים למשוואה ריבועית שאתם מכירים).