<u>מבנים דיסקרטיים – תרגיל בית 8</u>

1. יהי R תחום שלמות סופי, הראו שבהכרח R שדה (רמז: תרגמו לטענה שראינו על תנאי מספיק לכך שמונואיד הוא חבורה).
2. הוכח או הפרך:
   a. אם I אידיאל אזי הקבוצה $S=\{1-a : a\in I\}$ סגורה לכפל (כלומר לכל $x,y\in S$ מתקיים $xy\in S$).
   b. $R(a+b)=Ra+Rb$ לכל a,b בחוג R.
   c. איחוד של אידיאלים הוא אידיאל.
   d. יהיו $R\subseteq S$ חוגים ויהי $I\lhd R$, אזי $I\lhd S$.
3. קבעו האם קיים הומומורפיזם $\varphi:R\to S$ (לאו דוקא יוניטרי) $\varphi\not\equiv 0$, כאשר:
   a. $R=\mathbb{Z}_n$ ו $S=\mathbb{Z}_m$ כאשר $m\mid n$.
   b. $R=\mathbb{Z}_n$ ו $S=\mathbb{Z}_m$ כאשר $n\mid m$ וגם $0<m\neq n$.
4. נביט בחוג הפולינומים $R[x]$ מעל תחום שלמות R. האם I אידיאל כאשר
   a. $I=\{f\in R[x]: f(137)=0\}$
   b. $I=\{f\in R[x]: f(1)=10\}$
   c. $I=\{f\in R[x]: f(0)=0\}$
5. יהי R חוג קומוטטיבי. יהי $a\in R$. הראו שאם $Ra=R$ אזי a הפיך.
6. יהי R תחום שלמות פשוט (חוג פשוט הוא חוג ללא אידאלים דו-צדדיים לא טריויאליים, כלומר כל אידאל דו-צדדי ב R הוא $\{0\}$ או R). הראו שבהכרח R שדה.