חשבון אינפי 1 למדמ"ח

תרגיל 4- פתרון

1. השתמשו בהגדרת הנגזרת על מנת לבדוק את קיום הנגזרת של הפונקציה $y=\left|(x-2)^3\right|$ בכל אחת מנקודות של תחום הגדרתה.

פתרון: $D(f)=\mathbb{R}$.

$$f'(x)=st\left(\frac{\left|(x+\vartriangle x-2)^3\right|-\left|(x-2)^3\right|}{\vartriangle x}\right)$$

נחלק לשלושה מקרים : (**שימו לב:** x ממשי ו- $\vartriangle x$ אינפיניטסימלי ואינו ממשי)

א. $x>2$

במקרה זה $x=st(x+\vartriangle x)>2$ ולכן לפי אחת הטענות שהוכחנו בתרגול $x+\vartriangle x>2$. מכאן $\left|(x+\vartriangle x-2)^3\right|=(x+\vartriangle x-2)^3$ ולכן

$$f'(x)=st\left(\frac{\left|(x+\vartriangle x-2)^3\right|-\left|(x-2)^3\right|}{\vartriangle x}\right)=st\left(\frac{(x+\vartriangle x-2)^3-(x-2)^3}{\vartriangle x}\right)$$

$$=st\left(\frac{(x-2)^3+3(x-2)^2\vartriangle x+3(x-2)\vartriangle x^2+\vartriangle x^3-(x-2)^3}{\vartriangle x}\right)$$

$$=st\left(\frac{3(x-2)^2\vartriangle x+3(x-2)\vartriangle x^2+\vartriangle x^3}{\vartriangle x}\right)=st\left(3(x-2)^2+3(x-2)\vartriangle x+\vartriangle x^2\right)=3(x-2)^2$$

ב. $x<2$

במקרה זה $x=st(x+\vartriangle x)<2$ ולכן $x+\vartriangle x<2$. מכאן $\left|(x+\vartriangle x-2)^3\right|=-(x+\vartriangle x-2)^3$ ולכן

$$f'(x)=st\left(\frac{\left|(x+\vartriangle x-2)^3\right|-\left|(x-2)^3\right|}{\vartriangle x}\right)=st\left(\frac{-(x+\vartriangle x-2)^3+(x-2)^3}{\vartriangle x}\right)$$

$$=st\left(\frac{-(x-2)^3-3(x-2)^2\vartriangle x-3(x-2)\vartriangle x^2-\vartriangle x^3+(x-2)^3}{\vartriangle x}\right)$$

$$=st\left(\frac{-3(x-2)^2\vartriangle x-3(x-2)\vartriangle x^2-\vartriangle x^3}{\vartriangle x}\right)=st\left(-3(x-2)^2-3(x-2)\vartriangle x-\vartriangle x^2\right)=-3(x-2)^2$$

ג. $x=2$

כדי לבדוק את קיום הנגזרת בנקודה $x=2$ צריך לחשב את החלק הסטנדרטי $st\left(\frac{\left|\vartriangle x^3\right|}{\vartriangle x}\right)$. במקרה זה נקבל $st\left(\frac{\left|\vartriangle x^3\right|}{\vartriangle x}\right)=\begin{cases} st\left(\vartriangle x^2\right) & \vartriangle x>0 \\ st\left(-\vartriangle x^2\right) & \vartriangle x<0 \end{cases}=0$ ולכן $f'(2)=0$.

לסיכום:

$$f'(x)=\begin{cases} 3(x-2)^2 & x>2 \\ 0 & x=2 \\ -3(x-2)^2 & x<2 \end{cases}$$

2. גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $u=-\left(2x+3+4x^{-1}\right)^{-1}$

פתרון:

$$\frac{du}{dx}=\left(2x+3+4x^{-1}\right)^{-2}\left(2-4x^{-2}\right)$$

ב. $v=\dfrac{2x^{-1}-x^{-2}}{3x^{-1}-4x^{-2}}$

פתרון:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\left(-2x^{-2}+2x^{-3}\right)\left(3x^{-1}-4x^{-2}\right)-\left(2x^{-1}-x^{-2}\right)\left(-3x^{-2}+8x^{-3}\right)}{\left(3x^{-1}-4x^{-2}\right)^2}$$

$$=\frac{(-2x+2)(3x-4)-(2x-1)(-3x+8)}{x(3x-4)^2}=\frac{-5x}{x(3x-4)^2}=-\frac{5}{(3x-4)^2}$$

ג. $w=3\left(x^2+1\right)\left(2x^2-1\right)(2x+3)$

פתרון:

$$\frac{dw}{dx}=3\cdot 2x\left(2x^2-1\right)(2x+3)+3\left(x^2+1\right)\cdot 4x(2x+3)+3\left(x^2+1\right)\left(2x^2-1\right)\cdot 2$$

$$=60x^4+72x^3+18x^2+18x-6$$

3. יהיו u ו-v פונקציות של x. מצאו את dy במונחים של du ו-dv:

א. $y=u^2v$

פתרון:

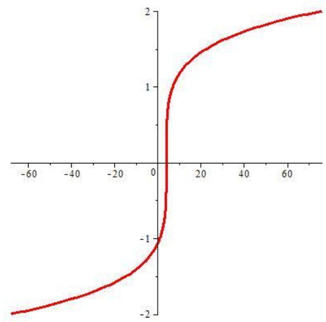
$$dy=2uvdu+u^2dv$$

ב. $y=\dfrac{1}{u+v}$

פתרון:

$$dy=-\frac{1}{(u+v)^2}(du+dv)=-\frac{1}{(u+v)^2}du-\frac{1}{(u+v)^2}dv$$

4. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $x=2y^5+y^3+4$ בנקודה $(7,1)$. (שימו לב הגרף הינו במישור (x,y) - ראו שרטוט).



פתרון:

לפי הגרף רואים שהפונקציה הפיכה (לכל תמונה x יש מקור יחיד y) ולכן לפי משפט הנגזרת של הפונקציה ההפוכה נקבל ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(7,1)$

הינו $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(7,1)}=\left.\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right|_{(7,1)}=\left.\frac{1}{10y^4+3y^2}\right|_{(7,1)}=\frac{1}{13}$ ולכן משוואת המשיק היא

$l(x)=\frac{1}{13}(x-7)+1=\frac{1}{13}x+\frac{6}{13}$.

5. מצאו את הפונקציה ההפוכה y ואת הנגזרת $\frac{dy}{dx}$ כפונקציות מפורשות של x:

א. $x=y^2+3y-1,\quad y\geq-\frac{3}{2}$

פתרון:

נפתור את המשוואה $x=y^2+3y-1$ ביחס ל- y ונקבל

$$y^2+3y-1-x=0$$

$$y_1=\frac{-3+\sqrt{9+4(1+x)}}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13+4x}}{2}\geq-\frac{3}{2}$$

$y_2=\frac{-3-\sqrt{9+4(1+x)}}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13+4x}}{2}\leq-\frac{3}{2}$ ולכן לא מתאים.

כלומר הפונקציה ההפוכה $y=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13+4x}}{2}$, $D(y)=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\geq-\frac{13}{4}\right\}$.

לפי משפט הנגזרת של הפונקציה ההפוכה מתקיים:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y+3}=\frac{1}{2\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13+4x}}{2}\right)+3}=\frac{1}{\sqrt{13+4x}}$$

ב. $x=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}-1,\quad y>0$ רמז: הציבו $t=\frac{1}{y}$

פתרון: נציב $t=\frac{1}{y}>0$ ונקבל $x=t^2+t-1$.

נפתור ביחס ל- t ונקבל

$$t^2+t-1-x=0$$

$$t_1=\frac{-1+\sqrt{1+4(1+x)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5+4x}}{2}$$

נשים לב ש- $t^2+t=x+1>0$ ולכן $x>-1$ ולכן $5+4x>1$ ומכאן

$$t_1=\frac{-1+\sqrt{5+4x}}{2}>0$$

$t_2=\frac{-1-\sqrt{1+4(1+x)}}{2}=\frac{-1-\sqrt{5+4x}}{2}<0$ ולכן לא מתאים.

לסיכום נקבל $y=\frac{2}{-1+\sqrt{5+4x}}>0$.

לפי משפט הנגזרת של הפונקציה ההפוכה מתקיים:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\frac{2}{y^3}-\frac{1}{y^2}}=\frac{y^3}{-2-y}=\frac{\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5+4x}}\right)^3}{-2-\frac{2}{-1+\sqrt{5+4x}}}=\frac{-4}{\sqrt{5+4x}\left(-1+\sqrt{5+4x}\right)^2}$$

ג. $x=y^4+y^2+1,\quad y\ge 0$

פתרון: נסמן $t=y^2\ge 0$ ונפתור את המשוואה $x=t^2+t+1$ ביחס ל- t.

$$t^2+t+1-x=0$$

$$t_1=\frac{-1+\sqrt{1-4(1-x)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}$$

נשים לב ש- $x\ge 1$ ולכן $t_1=\frac{-1+\sqrt{1-4(1-x)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}\ge 0$

$t_2=\frac{-1-\sqrt{1-4(1-x)}}{2}=\frac{-1-\sqrt{4x-3}}{2}<0$ ולכן לא מתאים.

לסיכום נקבל $y^2=\frac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}$ ומאחר ש- $y\geq 0$ נקבל $y=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}}$.

לפי משפט הנגזרת של פונקציה הפוכה נקבל

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3+2y}=\frac{1}{4\left(\frac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{\frac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}}}$$

6. הוכיחו, כי לפונקציה $y=f(x)$ קיימת פונקציה הפוכה אם ורק אם לכל x_1,x_2 כך ש- $x_1\neq x_2$ מתקיים $f(x_1)\neq f(x_2)$. (**הערה:** אנחנו מתייחסים רק לנקודות (x,y) ששייכות לגרף הפונקציה, כלומר f מוגדרת בנקודה x ולמשוואה $y=f(x)$ בהכרח יש פתרון ביחס ל- x, כלומר קיים x כך ש- $y=f(x)$)

הוכחה:

נניח כי $y=f(x)$ הפיכה, כלומר קיימת פונקציה $x=g(y)$ בעלת אותו גרף כמו $y=f(x)$.

נניח בשלילה שקיימים x_1,x_2 כך ש- $x_1\neq x_2$ אבל $f(x_1)=f(x_2)$, כלומר $y_1=y_2$ ומכאן $x_1=g(y_1)=g(y_2)=x_2$ בסתירה להנחה ש- $x_1\neq x_2$ ולכן הנחת השלילה לא נכונה ולכל x_1,x_2 כך ש- $x_1\neq x_2$ מתקיים $f(x_1)\neq f(x_2)$. **ע"כ הכיוון הראשון של הטענה.**

נניח שלכל x_1,x_2 כך ש- $x_1\neq x_2$ מתקיים $f(x_1)\neq f(x_2)$ ונוכיח ש- $y=f(x)$ הפיכה.

נניח בשלילה ש- $y=f(x)$ לא הפיכה, כלומר אם נפתור את המשוואה $y=f(x)$ ביחס ל- x נקבל לפחות שני פתרונות שונים $x_1=g_1(y)$ ו- $x_2=g_2(y)$ כך ש- $x_1\neq x_2$ כאשר $f(x_1)=y=f(x_2)$ בסתירה להנחה ש- $f(x_1)\neq f(x_2)$ ולכן הנחת השלילה לא נכונה ו- $y=f(x)$ הפיכה.

מש"ל