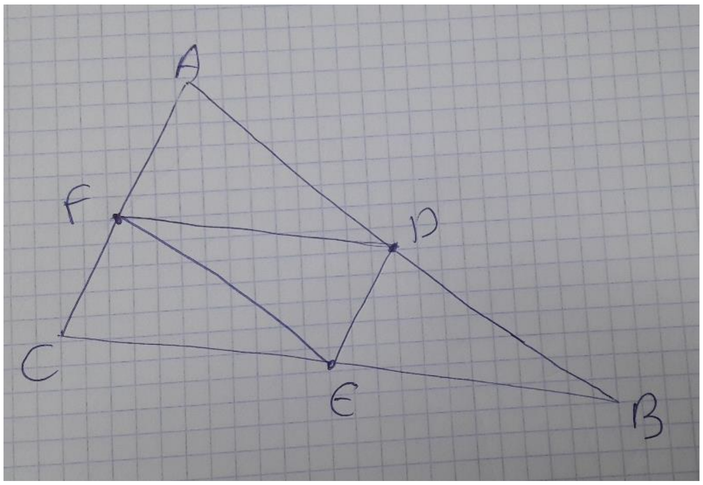
גאומטריה אוקלידית ולא אוקלידית

פתרון תרגיל 1

<u>שאלה 1</u>

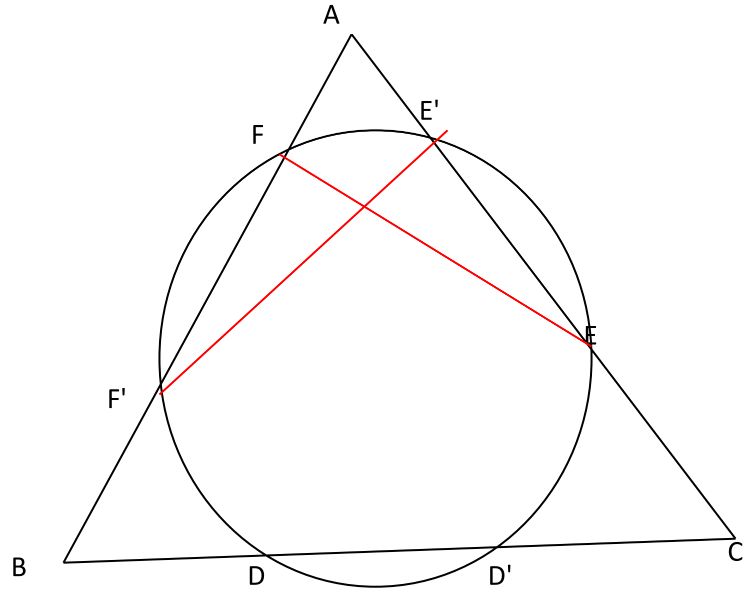
נשרטט בתוך המשולש ABC הנתון את המשולש DEF המתקבל ע"י 3 קטעי האמצעים של המשולש הנתון:



כזכור קטע אמצעים מקביל לצלע השלישית. לכן 3 הצלעות של המשולש הפנימי מקבילות ל-3 הצלעות של המשולש החיצוני. כעת יהי אנך אמצעי ל-AB, כלומר עובר דרך D. הוא גובה ל-EF (כי הצלעות מקבילות..). באותו אופן האנך האמצעי שעובר דרך E הוא גובה ל-DF והאנך האמצעי שעובר דרך F הוא גובה ל-DE.

שלושת הגבהים של DEF נפגשים בנקודה, ולפי לעיל אלה הם שלושת האנכים האמצעיים של ABC, לכן שלושת האנכים האמצעיים של ABC נפגשים בנקודה, מש"ל.

<u>שאלה 2</u>



נשים לב כי $\begin{cases} \Delta AFE \approx \Delta AE'F' \\ \Delta BF'D' \approx \Delta BDF \\ \Delta CD'E' \approx \Delta CED \end{cases}$ שלושתם בשל זווית אחת משותפת וזווית אחת היקפית זהה, לכן:

$$\text{CF,BE,AD קונקורנטיים} \overset{Ceva}{\Longleftrightarrow} \frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}=1 \overset{\text{דמיון}}{\Longleftrightarrow} \frac{AF'}{F'B}\frac{BD'}{D'C}\frac{CE'}{E'A}=1 \overset{Ceva}{\Longleftrightarrow} \text{CF',BE',AD' קונקורנטיים}$$

<u>שאלה 3.א</u>

בהתאם לשרטוט שהופיע בשאלה, העברנו דרך C ישר CE המקביל לחוצה הזווית AD.

כעת המשולש ACE הוא שווה שוקיים (<BAD = <BEC ממקבילים, וכן <ECA+<BEC שווה לזווית החיצונית <BAC=2<BAD כלומר סה"כ <ECA=<AEC).

כמו כן מ-CE||AD מקבלים שמשולש ABD דומה למשולש EBC. לכן:

BD/BC = BA / BE

כלומר

BD/DC = BA/AE = BA/AC

כלומר

BD/DC=BA/AC

כדרוש.

שאלה 3.ב

נעבוד עם השרטוט שהופיע בשאלה. נעביר מקביל ל-AB דרך C נסמנו CE (E על המשך AD).

נסמן <DAB=x.

AD חו"צ וכן מקודקודיות נקבל גם <EAC=x.

ממקבילים <AEC=x. לכן סה"כ משולש CAE שו"ש (AC=EC).

ממקבילים משולש DAB דומה למשולש DEC. לכן:

DB/DC = AB/EC = AB/AC

כדרוש.

שאלה 4

כמו בהדרכה בשאלה, בונים P על CD כך ש-AD=DP.

כעת לפי חשבון זוויות מקבלים כי $< PAC = 22.5°$ כלומר $< PAC =< PCA$ כלומר PA=PC.

מצד שני <BDA ישרה וכן $< ABD = 45°$ לכן $< ABD = < BAD$. כלומר BD=AD.

לסיום כדי להראות ש-AD,BE,CF נפגשים בנקודה צריך לפי צ'בה להראות שמכפלת היחסים הבאה היא 1:

$$AE/EC \ \cdot CD/DB \ \cdot BF/FA$$

מתקיים BF/FA=1 מהנתון כי CF תיכון.

כמו כן BE חוצה זווית לכן לפי משפט חוצה זווית פנימית מקבלים

AE/EC = AB/BC.

לכן נשאר להראות ש-

$$AB/BC \ \cdot CD/DB \ = \ 1$$

נסמן $\mathrm{AD} = \mathrm{x}$ ואז לפי כל האמור לעיל גם $DP = \mathrm{BD} = x$. לפי פיתגורס במשולש ADB מקבלים

$$AB = \sqrt{2}x$$

לפי פיתגורס ב-APD גם $AP = \sqrt{2}x$. ראינו לעיל PC=AP לכן $PC = \sqrt{2}x$. לכן

$$CD = CP + PD = \left(1 + \sqrt{2}\right)x$$

סה"כ:

$$AB/BC \cdot CD/DB = \sqrt{2}x/\left(2 + \sqrt{2}\right)x \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)x/x = 1$$

כדרוש.

שאלה 5

נעבוד עם השרטוט שהיה נתון בשאלה.

לפי מנלאוס להראות ש-F,E,D על ישר אחד שקול ללהראות שהיחס הבא הוא 1-:

$$BD/DC \cdot CE/EA \cdot AF/FB$$

לפי שימוש במשפט חוצה זווית חיצונית 3 פעמים מקבלים שהיחס הוא:

$$AB/AC \cdot BC/BA \cdot CA/CB = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

כדרוש.