.1

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$סדרה חסומה, אזי היא סדרת קושי.

(ב) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$סדרת קושי , אזי היא חסומה.

<u>פתרון:</u>

(א) לא נכון. נפריך ע"י דוגמה נגדית:

ניקח את הסדרה $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$). היא חסומה כיוון ש $|a_n| = 1 \leq 1$

ברור שהיא לא סדרת קושי כיוון שעבור $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ זוגי נקבל כי a_N אינסופי חיובי,

ולכן $N+1 \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ אי־זוגי נקבל כי a_{N+1} אינסופי שלילי ולכן כמובן $a_N \not\approx a_{N+1}$.

(ב) הוכחה:

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$סדרת קושי, אזי לפי משפט היא מתכנסת לגבול L. כלומר לכל $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ מתקיים $a_N \approx L$, ולכן a_N סופי, כלומר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

2. תהי (a_n) סדרה ויהי $0<p<1$ מס' ממשי. נתון כי לכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים: $|a_n-a_{n-1}|<p^n$. הראו כי (a_n) היא סדרת קושי.

<u>פתרון:</u>

נתבונן ב $a_n - a_m$ עבור $n > m$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + ... + a_{m+1} - a_m| \leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} + a_{n-2}| + ... + |a_{m+1} - a_m|$$

$$\leq \frac{1}{p^n}+\frac{1}{p^{n-1}}+...+\frac{1}{p^{m+1}} == \frac{1}{p^{m+1}}\left(\frac{1}{p^{n-m+1}}+ .... +1\right) = \frac{1}{p^{m+1}}\left(\frac{1-\frac{1}{p^{n-m}}}{1-p}\right) = \frac{1}{p^m}\left(1-\frac{1}{p^{m+n}}\right) = \frac{1}{p^m}-\frac{1}{p^n}$$

כעת אם ניקח $N, M \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ נקבל $|a_N - a_M| \leq \frac{1}{p^M} - \frac{1}{p^N} \approx 0$ כדרוש.

3. מיצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות:

(א) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

(ב) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

<u>פתרון:</u>

א) עבור $n=2k$ זוגי נקבל $a_{2k}=\left(1+\frac{1}{2k}\right)\to 1$ ולכן גבול חלקי הוא 1

עבור $n=2k+1$ אי זוגי נקבל: $a_{2k+1}=\left(-1+\frac{1}{2k+1}\right)\to -1$ ולכן גבול חלקי נוסף הוא 1-

נראה שאין גבולות חלקיים נוספים: נניח בשלילה שיש גבול חלקי נוסף $L\neq\pm1$. לפי ההגדרה יש תת סדרה אינסופית השואפת אליו, ולכן היא בהכרח מכילה אינסוף איברים זוגיים או אינסוף איברים אי זוגיים. נניח בלי הגבלת הכלליות שיש אינסוף איברים אי זוגיים, ולכן נתבונן בתת סדרה המורכבת מאיברים אלה. מצד אחד הם שואפים ל--1 אבל מצד שני הם שואפים ל-L. ולכן מיחידות הגבול נקבל $L=-1$ בסתירה להנחה.

ולכן ±1 הם הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה.

ב) עבור $n=2k$ זוגי נקבל: $a_{2k}=\sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right)=\sin\left(\pi k\right)=0$ ולכן גבול חלקי הוא 0

עבור $n=4k+1$ נקבל: $a_{4k+1}=\sin\left(\frac{4k\pi+\pi}{2}\right)=1$ ולכן גבול חלקי נוסף הוא 1.

עבור $n=4k+3$ נקבל: $a_{4k+3}=\sin\left(\frac{4k\pi+3\pi}{2}\right)=\sin\left(2\pi k+\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ ולכן גבול חלקי נוסף הוא 1-.

נראה שאין גבולות חלקיים נוספים: נניח בשלילה שיש גבול חלקי נוסף $L\neq 0,\pm1$. לפי ההגדרה יש תת סדרה אינסופית השואפת אליו, ולכן היא בהכרח מכילה אינסוף איברים זוגיים או אינסוף איברים השקולים ל-$1mod4$או אינסוף איברים השקולים ל- $3mod4$. נניח בלי הגבלת הכלליות שיש אינסוף איברים זוגיים, ולכן נתבונן בתת סדרה המורכבת מאיברים אלה. מצד אחד הם שואפים ל-אפס, אבל מצד שני הם שואפים ל-L. ולכן מיחידות הגבול נקבל $L=0$ בסתירה להנחה.

ולכן ±1 ,0 הם הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה.

4. א. הראו לפי הגדרה כי הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x+1}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,5)$.

ב. אם הייתם מנסים להראות כי הפונקציה רציפה במידה שווה בקטע $(-5,5)$, היכן הוכחתם מסעיף א' היתה נכשלת?

ג. השתמשו במשפט קנטור כדי להראות כי הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x+1}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,5)$ (שימו לב כי הקטע פתוח).

ד. אם הייתם מנסים להראות כי הפונקציה רציפה במידה שווה בקטע $(-5,5)$, היכן הוכחתם מסעיף ג' היתה נכשלת?

<u>פתרון:</u>

א. יהיו $x_1\approx x_2\in(0,5)$. צ"ל ש- $f(x_1)-f(x_2)$ אינפי' כלומר:

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$. המונה הוא אינפי' לפי בחירת $x_{1,}x_2$. המכנה הוא לא אינפי' כי $x_{1,}x_2>-1$. לכן סה"כ הביטוי הוא אינפי', כדרוש.

ב. לא היינו יכולים להסיק שהביטוי במכנה, $(x_1+1)(x_2+1)$, איננו אינפי', כי אם $x_1\approx x_2\approx -1$ נקבל מכנה אינפי'.

ג. הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x+1}$ רציפה ב- $[0,5]$ (מנה של פונקציות רציפות, עם מכנה שאיננו מתאפס בקטע). לכן לפי משפט קנטור $f(x)$ רציפה במ"ש ב- $[0,5]$. לכן $f(x)$ רציפה ב- $(0,5)$ (אם פו' רציפה במ"ש בקטע מסוים, היא רציפה במ"ש בכל תת-קטע).

ד. לא היינו יכולים לטעון ש- $f(x)$ רציפה ב- $[-5,5]$ (כי היא לא רציפה ב- -1 כי היא לא מוגדרת שם).

5. הראו כי הפונקציות הבאות לא רציפות במידה שווה בקטע $(0,1)$:

א. $f(x)=\frac{1}{x}$

<u>פתרון:</u> יהי ϵ אינפי' חיובי. נבחר $x_1=\epsilon$, $x_2=2\epsilon$. ברור כי $x_1\approx x_2$. אך $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{\epsilon}-\frac{1}{2\epsilon}=\frac{1}{2\epsilon}$ כלומר קיבלנו ביטוי אינסופי חיובי, ובפרט לא אינפיניטסימלי, כלומר, הפונקציה איננה רציפה במ"ש בקטע הנתון.

ב. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

פתרון: נבחר שני מספרים היפר ממשיים $x=\frac{1}{\ln H}$ ו $y=\frac{1}{\ln(H+1)}$. שניהם אינפיניטיסימלים, ולכן כמובן ש $x\approx y$. אבל

$$f(x)=e^{\ln H}=H$$

$$f(y)=e^{\ln(H+1)}=H+1$$

כמובן ש $f(x)\not\approx f(y)$. ולכן הפונקציה לא רציפה במ"ש.

ג. $f(x)=\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$

פתרון: כמו קודם, נבחר שני מספרים אינפיניטיסימלים שבשבילם הערך של $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ אינו קרוב אינפיניטיסמלית. אם H היפרשלם אז נבחר

$$x_1=\frac{1}{2\pi H}\quad x_2=\frac{1}{2\pi H+\frac{\pi}{2}}$$

ואז

$$f(x_1)=2\pi H\sin 2\pi H=0$$

$$f(x_2)=(2\pi H+\frac{\pi}{2})\sin(2\pi H+\frac{\pi}{2})=2\pi H+\frac{\pi}{2}$$

כמובן ש

$$f(x_1)\not\approx f(x_2)$$

ולכן f אינה רציפה במ"ש בקטע הנתון.

6. יהיו $f(x),g(x)$ פונקציות רציפות במידה שווה ב- IR . הוכיחו או הפריכו:
א. המכפלה $f(x)g(x)$ רציפה במידה שווה ב- IR .
ב. ההרכבה $f(g(x))$ רציפה במידה שווה ב- IR .

פתרון:

א. הפרכה: $f(x)=g(x)=x$ רציפות במ"ש ב- IR , אך $f(x)g(x)=x^2$ איננה.
ב. הוכחה: יהיו $x_1\approx x_2$. צריך להראות כי $f(g(x_1))\approx f(g(x_2))$. אכן, ראשית, מתקיים $g(x_1)\approx g(x_2)$ כי $x_1\approx x_2$ ו- $g(x)$ רציפה במ"ש ב- IR . כעת, $f(g(x_1))\approx f(g(x_2))$ כדרוש, כי $g(x_1)\approx g(x_2)$ ו- $f(x)$ רציפה במ"ש ב- IR .

7. האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים?

(א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

(ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3n+4}}$$

(ג)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n^2}$$

(ד)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n}$$

פתרון:

(א) ברור כי $\sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n} = n$ ולכן $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. כיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, נקבל כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ מתבדר לפי מבחן ההשואה.

(ב)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3n+4}} = 1$$

כלומר תנאי הכרחי להתכנסות לא מתקיים, ולכן הטור מתבדר.

(ג) $\frac{1}{3^n+n^2} < \frac{1}{n^2}$ ולכן ממשפט ההשואה, הטור מתכנס.

(ד) נשתמש במבחן ההשואה עם $\frac{1}{n^2}$.

לכל $n \geq 4$ מתקיים:

$$n^2-3n = n^2\left(1-\frac{3}{n}\right) \geq n^2 \cdot \frac{1}{4} \implies \frac{1}{n^2-3n} \leq \frac{4}{n^2}$$

וכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, נקבל כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n}$ מתכנס, לפי מבחן ההשואה.

8. האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ מתכנס?

רמז: חשבו ישירות את סדרת הסכומים החלקיים S_n . כל האיברים מצטמצמים חוץ מהאחרון. הסיקו כי $Sn \to \infty$.

<u>פתרון:</u> נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$. מתקיים:

$$S_n = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) \to \infty$$

כלומר הטור מתבדר לאינסוף.

9. נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

א. נסו לקבוע על סמך מבחן המנה האם הטור מתכנס או מתבדר. מה מסקנתכם?

<u>פתרון:</u>

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{e^n n!} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e\left(\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{-n-1}\right)^{\frac{n}{-n-1}} \to e \cdot e^{-1} = 1 .$$

לכן לא ניתן להסיק דבר ממבחן המנה.

ב. אם פתרתם נכונה את סעיף א', הסקתם כי לא ניתן להשתמש במבחן המנה כדי להחליט האם הטור הנתון מתכנס או מתבדר. הראו בדרך אחרת כי הוא מתבדר. רמז: הראו כי a_n לא שואפת ל- 0 ולכן הטור מתבדר.

רמז לרמז: $a_1 = e$, וכן a_n מונוטונית עולה (הסתכלו על $\frac{a_{n+1}}{a_n}$).

<u>פתרון:</u>

$a_1 = e > 0$. לכן אם נראה כי a_n מונוטונית עולה ודאי נסיק כי a_n איננה שואפת ל-0 ולכן הטור מתבדר.

נראה זאת ע"י כך שנראה כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. חישבנו את $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ בסעיף הקודם כשניסינו להשתמש במבחן המנה:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$. כעת, ראיתם בהצאה כי $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ מתכנסת ל- e מלמטה (מונוטונית עולה). לכן $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$ מתכנסת ל- e^{-1} מלמעלה (מונוטונית יורדת). כלומר $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n > e^{-1}$ לכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n > e \cdot e^{-1} = 1$,

מש"ל.