תרגיל 2 בחשבון אינפיניטסימלי 1 – 88-132 – תש"פ – להגשה בתאריך 19.11.19

1. יהי $(F,+,\cdot)$ שדה.
   א. הוכיחו כי האיבר הניטרלי לחיבור של השדה הוא יחיד (נהוג לסמנו 0_F).
   ב. יהי $a\in F$. הוכיחו כי האיבר הנגדי של a הוא יחיד (נהוג לסמנו $-a$).
   ג. הוכיחו כי לכל $a\in F$ מתקיים $a\cdot 0_F=0_F$.

2. יהי $(F,+,\cdot,\leq)$ שדה סדור, $a,b,c,d\in F$.
   א. הוכיחו כי אם $a\leq b$ וגם $c\leq d$ אז $a+c\leq b+d$.
   ב. הוכיחו כי $a\geq 0$ אם ורק אם $-a\leq 0$.
   ג. נתון כי $c\leq 0$. הוכיחו כי אם $a\leq b$ אז $bc\leq ac$.

3. הוכיחו / הפריכו:
   א. לכל קבוצה של מספרים ממשיים יש לפחות חסם מלעיל אחד או לפחות חסם מלרע אחד.
   ב. לכל קבוצה של מספרים ממשיים שיש לה לפחות חסם מלעיל אחד יש חסם תחתון.
   ג. לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים שיש לה לפחות חסם מלרע אחד יש לפחות חסם מלעיל אחד.
   ד. לכל קבוצה לא ריקה של של מספרים רציונליים בעלת מקסימום יש חסם עליון רציונלי.
   ה. לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים יש חסם עליון אחד ויחיד.
   ו. לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע של מספרים ממשיים יש חסם תחתון אחד ויחיד.
   ז. לכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים קיים חסם תחתון.
   ח. קיימת קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים אשר החסם העליון שלה שווה לחסם התחתון שלה.
   ט. קיימת קבוצה של מספרים ממשיים אשר החסם העליון שלה שווה לחסם התחתון שלה ואשר אין לה מקסימום.

4. הוכיחו כי אם $A\subset\mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל אז M חסם עליון של A אם ורק אם M חסם מלעיל של A וגם לכל $0<\epsilon$ ממשי קיים $a\in A$ כך ש-$M-\epsilon<a$.

5. יהיו $S\subseteq T\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל. הוכיחו כי $sup(S)\leq sup(T)$.

6. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל. נגדיר $B=\{-a\mid a\in A\}$. הוכיחו כי B חסומה מלרע וכן כי $inf(B)=-sup(A)$.

7. לכל אחת מהקבוצות הבאות מיצאו (והוכיחו) חסם עליון, חסם תחתון, מקסימום, מינימום (אם קיימים):
   א. $A=\{5+\frac{2}{3n}\mid n\in\mathbb{N}\}$
   ב. $B=\{\frac{1}{n^2}+6\cdot(-1)^n\mid n\in\mathbb{N}\}$
   ג. $C=\{n+\frac{1}{m}\mid n,m\in\mathbb{N}\}$
   ד. $\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}\right)^n\mid n\in\mathbb{N}\}$