אינפי 4 תרגיל 1 פתרון:

1. נבדוק ששלוש התכונות של יחס שקילות מתקיימות.

<u>רפלקסיביות:</u> פונקציית הזהות $\varphi : [a,b] \to [a,b], \varphi(t) = t$ היא מונוטונית עולה, רציפה ועל ומתקיים:

$$\delta(\varphi(t)) = \delta(t)$$

ולכן עקומה שקולה לעצמה והיחס רפלקסיבי.

<u>סימטריות:</u> נניח שקיימת $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ מונוטונית עולה, רציפה ועל עבורה $\gamma(\varphi(t)) = \delta(t)$.

לפונקציה שלנו יש פונקציה הפוכה $\varphi^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ מונוטונית עולה, רציפה ועל ונקבל:

$$\gamma(\varphi(\varphi^{-1}(t)) = \delta(\varphi^{-1}(t))$$

ולכן

$$\gamma(t) = \delta(\varphi^{-1}(t))$$

ולכן היחס סימטרי.

<u>טרנזיטיביות:</u> נניח שקיימת $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ כנ"ל כך ש$-\gamma(\varphi(t)) = \delta(t)$ ושקיימת $\psi : [c,d] \to [e,f]$ כנ"ל כך ש$\delta(\psi(t)) = \kappa(t)$ כאשר $\kappa : [e,f] \to \mathbb{R}^n$ עקומה.

גם ההרכבה $\varphi \circ \psi$ היא מונוטונית עולה רציפה ועל ומתקיים:

$$\gamma(\varphi(\psi(t)) = \kappa(t)$$

ולכן היחס טרנזיטיבי. סה"כ זהו יחס שקילות.

*שימו לב שהמשתנה t נלקח במקומות שונים מקטעים שונים, לפי הפונקציות שפועלות עליו; אתם סטודנטים יפים ומוצלחים ותבינו לבד מאיפה המשתנה נלקח בכל פעם.

2. את גרף הפונקציה ניתן להביע כעקומה באופן הבא:

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

ואם כן נקבל:

$$\gamma'(t) = (1, f'(t)) \to \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

ומהגדרת האורך של עקומה גזירה ברציפות נקבל את הדרוש.

3. מעגל שרדיוסו R ומרכזו בנקודה (a, b) ניתן להצגה ע"י העקומה:

$$\gamma(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t), t \in [0, 2\pi)$$

נקבל:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$$

ולכן:

$$P = L(\gamma) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

4. נשתמש בהצגה קוטבית:

$$x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta$$

כלומר: $\gamma(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$.

נזכור שרק הזווית היא חופשית ולכן נשתמש בנוסחה לאורך עקומה לפי θ:

$$L = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sqrt{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^2 + (r'\sin\theta + r\cos\theta)^2} d\theta = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta$$

5. נחשב את אורך הקרדיואדה בעזרת הנוסחה:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} d\theta =$$

$$\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\theta} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(\frac{\theta}{2})} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} |cos(\frac{\theta}{2})| d\theta =$$

השתמשנו בזהות ל$-\cos$ של זווית כפולה.

כדי להיפטר מהערך המוחלט, נחלק את התחום לשני קטעים $[0,\pi], [\pi,2\pi]$. בכל אחד מהתחומים האורך הוא 4 ובסה"כ האורך הוא 8.