נכתב על ידי נועם יערי

הגדרה

יהי $T: V \to V$ אופרטור ליניארי, $\dim V = n$. אומרים **ש T ניתן ללכסון** אם קיים בסיס B של V כך שהמטריצה המייצגת A של T יחסית לB היא מטריצה אלכסונית.

משפט (קריטריון כללי ללכסון אופרטור)

$T: V \to V$ ניתן ללכסון $\leftrightarrow$ ב-V יש בסיס B המורכב מווקטורים עצמיים של T.

דוגמה (לשימוש של הקריטריון הכללי)

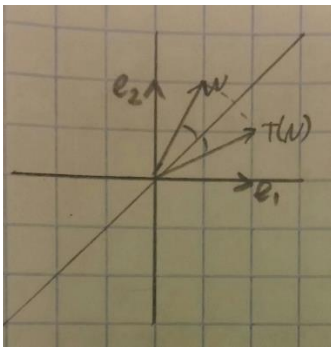
1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ או $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

אין למטריצות ע״ע לכן אין ווקטורים עצמיים לכן אין בסיס של $\mathbb{R}^2$ המורכב מווקטורים עצמיים ולכן ע״פ הקריטריון הכללי A אינה לכסינה.

2) F כלשהו, $A = J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$ ערך עצמי יחיד $\dim V_\lambda = 1$ (כל וקטור עצמי הוא בצורה $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$)

לכן, עבור $n \geq 2$, אין בסיס המורכב מו״ע של A ב $\mathbb{F}^n$

3) $V = \mathbb{R}^2$ נגדיר $T: V \to V$ באופן הבא:



(**תרגיל בית:** להוכיח ש-T הוא אופרטור ליניארי)

שאלה

האם T ניתן ללכסון?

$$T(e_1) = e_2, T(e_2) = e_1$$

לכן: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = \det\begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

נחשב וקטורים עצמיים של A:

עבור $\lambda = 1$:

$$Av = v$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1$$

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

למשל $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

עבור $\lambda = -1$:

$$Av = -v$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

למשל $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

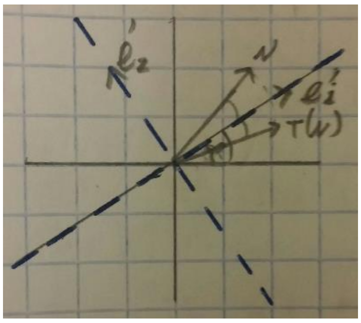
$$B = \{v_1, v_2\} = \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^2$. בדוגמה זו, $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ מטריצה מלכסנת.

(**תרגיל בית:** לבדוק $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$)

המשך דוג':

הכללה : נתבונן בציר אחר :



(**תרגיל בית:** להוכיח ש-T ניתן ללכסון בעזרת חישובים עם מטריצה מייצגת.)

פתרון (דרך אחרת לתרגיל בית)

נחשב את המטריצה המייצגת יחסית לבסיס $B' = \{e_1', e_2'\}$, e_1' מקביל לציר סימטריה

$$T(e_1') = e_1'$$

$$T(e_1') = -e_2'$$

תרגיל (אתגרי יותר)

יהי $T_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ אופרטור של סיבוב לזווית φ. נסמן בA_φ את המטריצה המייצגת של T_φ יחסית לבסיס הסטנדרטי. למצוא את כל הזוויות φ, φ' כך ש $A_\varphi \sim A_{\varphi'}$

הערות (פולינומים אופייניים) :

1) אם $T: V \to V$ אופרטור ליניארי אפשר להגדיר את הפולינום האופייני שלו.

$p_T(x) = P_A(x)$ כש-A היא המטריצה המייצגת של T יחסית לבסיס B כלשהו. (לבסיס 'B אחר מתאימה המטריצה המייצגת 'A דומה ל-A, לכן

$p_{A'}(x) = p_A(x)$)

2) תהי $A_{n\times n}$ מטריצה כלשהי אזי :

א. $\deg\ p_A(x) = n$

ב. $p_A x = x^n + \cdots$ הינו הפולינום מתוקן, כלומר ז״א המקדם הראשי שווה ל1.

ג. אם $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ אזי

$$a_0 = (-1)^n \det(A)\,, a_{n-1} = -tr(A)$$

הוכחה

$$p_A(x) = \det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x - a_{11} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & x - a_{nn} \end{pmatrix}$$

א, ב. $\boldsymbol{x^n}$' מופיע רק פעם אחת, לכן נקבל מיידית את א, ב.

$$a_0 \overset{\text{נכון לפולינום כלשהו}}{\cong} p_A(0) = (det(xI - A)_{x=0} = \det(-A) = \det\big((-1)A\big)$$
$$= (-1)^n \det(A)$$

כדי להוכיח כי $a_{n-1} = -tr(A)$ נשים לב שאיברים המכילים x^{n-1} מופיעים רק כתוצאה של פתיחת סוגריים במכפלה $(x - a_{nn}) \ldots (x - a_n)$ נקבל מקדם :

$$-tr(A) = -a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn}$$

נכתב על ידי נועם יערי

חילוק עם שארית

טענה

אם $f(x), g(x)$ פולינומים, $\deg\ g(x) = m$ אזי קיימים פולינומים q(x),r(x) כך ש-
$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ כך ש $\deg\ r < m$ או r=0.

מקרה מסוים:

אם $g(x) = x - a$ אזי $f(x) = q(x)(x - a) + r$ כש **r** קבוע.

מסקנה

אם **a** הוא שורש של **f** אזי $f(x) = q(x)(x - a)$

הוכחה

$0 = f(a) = q(a)(a - a) + r = r$ לכן $r = 0$.