פתרון תרגיל 1 אינפי 1 תיכוניסטים תשפ"א

4 בנובמבר 2020

- ענו על כל השאלות בכתב ברור וקריא עד כמה שאפשר.
- לפני ההגשה כתבו על התרגיל שם מלא ות.ז..
- נא להגיש בקובץ PDF אחד!

1. תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות חסומות (מלעיל ומלרע) ולא ריקות. נניח שמתקיים: $0\notin A$, ונסמן: $m=\inf A$. נגדיר:

$$A^{-1}=\left\{\frac{1}{a}\,|\,a\in A\right\}$$

$$A\cdot B=\{ab\,|\,a\in A,\,b\in B\}$$

הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $m\neq 0$, אז $\sup\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\inf A}$.

פתרון:

הפרכה. נתבונן בקבוצה $A=(-1,0)\cup(0,1)$, ולכן $A^{-1}=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. כאן, $m=-1$ אך A^{-1} לא חסומה מלמעלה.

(ב) $\sup\left(A\cdot B\right)=\sup A\cdot\sup B$.

פתרון:

הפרכה. נתבונן בקבוצות $A=B=(-1,0)$. $\sup A=\sup B=0$ ולכן $\sup A\cdot\sup B=0$. מצד שני, $AB=(0,1)$ ולכן $\sup AB=1$.

(ג) נתון בנוסף ש- $A\subseteq B$. הוכיחו או הפריכו:

i. $\inf(A)\leq\inf(B)$

ii. $\inf(B)\leq\inf(A)$

פתרון:

א. הפרכה: ניקח $A=(0,1)\subseteq(-1,1)$.

ב. הוכחה: נראה ש־ $A \leq \inf(B)$ (כלומר, $\inf(B)$ חסם מלרע של A), ואז, כיון שחסם מלרע קטן שווה לכל חסם תחתון (כי הוא הגדול ביותר מבין חסמי המלרע), נקבל $\inf(B) \leq \inf(A)$. ואכן: יהי $a \in A$, מההכלה נקבל $a \in B$ ומהגדרת $\inf$ נקבל: $\inf(B) \leq a$.

2. מצאו $\sup, \inf, \min, \max$ (אם קיימים) של הקבוצה הבאה:

$$A = \left\{ \frac{5n-4m}{n+m} | n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

<u>פתרון:</u>

טענה: $\sup A = 5$.

הוכחה: חסם מלעיל:

$$\forall n, m : \frac{5n-4m}{n+m} \leq \frac{5n}{n+m} \leq \frac{5n}{n} = 5$$

כעת, יהי $\epsilon > 0$, צריך למצוא $a \in A$ כך ש־ $a > 5 - \epsilon$. כלומר, למצוא n, m כך ש־ $\frac{5n-4m}{n+m} > 5 - \epsilon$. נבחר $m = 1$ ואז נחפש את n (שמן הסתם יהיה תלוי ב־ ϵ). נשים לב שמתקיים:

$$\frac{5n-4}{n+1} > 5 - \epsilon \iff 5 - \frac{5n-4}{n+1} < \epsilon \iff \frac{5n+5-5n+4}{n+1} < \epsilon$$

$$\iff \frac{9}{n+1} < \epsilon \iff \frac{9}{\epsilon} - 1 < n$$

כיון שהטבעיים לא חסומים אז אכן קיים n כזה, בפרט $n = \lceil \frac{9}{\epsilon} \rceil$ עושה את העבודה.

הערה: $5 \notin A$ כי: $\frac{5n-4m}{n+m} = 5 \iff 5n - 4m = 5n + 5m \iff m = 0 \notin \mathbb{N}$.

טענה: $\inf A = -4$.

הוכחה: חסם מלרע:

$$\forall n, m : \frac{5n-4m}{n+m} \geq \frac{-4m}{n+m}$$

כעת, יהי $\epsilon > 0$, צריך למצוא $a \in A$ כך ש־ $a < -4 + \epsilon$. כלומר, למצוא n, m כך ש־ $\frac{5n-4m}{n+m} < -4 + \epsilon$. נבחר $n = 1$ ואז נחפש את m (שמן הסתם יהיה תלוי ב־ ϵ). נשים לב שמתקיים:

$$\frac{5-4m}{m+1} < -4 + \epsilon \iff 4 + \frac{5-4m}{m+1} < \epsilon \iff \frac{4m+4+5-4m}{m+1} < \epsilon$$

$$\iff \frac{9}{m+1} < \epsilon \iff \frac{9}{\epsilon} - 1 < m$$

כיון שהטבעיים לא חסומים אז אכן קיים m כזה, בפרט $m = \lceil \frac{9}{\epsilon} \rceil$ עושה את העבודה.

בהצלחה!