תרגיל 4 לינארית 2

פתרון

1. א. פתרון: ראשית נמצא $\boldsymbol{\lambda}$ כך שהפולינום האופייני מתאפס.

0=det($\boldsymbol{\lambda I}$-$\boldsymbol{A}$)=$\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)$ ולכן נקבל $\boldsymbol{\lambda}=1,2$ הם ע"ע של המטריצה.כעת נמצא את הווקטור העצמי עבור כל אחד מהערכים.

- $\boldsymbol{\lambda=1}$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

מכאן הווקטור העצמי של $\boldsymbol{\lambda}=1$ הוא $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

- $\boldsymbol{\lambda=2}$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של:

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

מכאן הווקטור העצמי של $\boldsymbol{\lambda}=2$ הוא $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

ב. פתרון: ראשית נמצא $\boldsymbol{\lambda}$ כך שהפולינום האופייני מתאפס.

0=det($\boldsymbol{\lambda I}$-$\boldsymbol{A}$)=$\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)-4=\lambda^2-5\lambda$

ולכן נקבל $\boldsymbol{\lambda}=0,5$ הם ע"ע של המטריצה.

כעת נמצא את הווקטור העצמי עבור כל אחד מהערכים.

- $\boldsymbol{\lambda=0}$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של:

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ -1 & -4\end{pmatrix}$$

מכאן הווקטור העצמי של $\boldsymbol{\lambda}=0$ הוא $\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$.

- $\boldsymbol{\lambda=5}$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של:

$$\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

מכאן הווקטור העצמי של $\boldsymbol{\lambda}=0$ הוא $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

ג. פתרון: ראשית נמצא $\boldsymbol{\lambda}$ כך שהפולינום האופייני מתאפס.

0=det($\boldsymbol{\lambda I}$-$\boldsymbol{A}$)=$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -2 & 5 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda(\lambda-4)+5)-2+0$

$$=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=\lambda^3-\lambda^2-3\lambda^2+3\lambda+2\lambda-2=\lambda^2(\lambda-1)-3\lambda(\lambda-1)+2(\lambda-1)=$$

$$(\lambda-1)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

ולכן נקבל $\boldsymbol{\lambda}=1,2$ הם ע"ע של המטריצה.
כעת נמצא את הווקטור העצמי עבור כל אחד מהערכים.

- $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$$

מכאן הווקטור העצמי של $\boldsymbol{\lambda}=0$ הוא $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

- $\boldsymbol{\lambda}=2$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של:

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & -5 & 2\end{pmatrix}$$

מכאן הווקטור העצמי של $\boldsymbol{\lambda}=2$ הוא $\begin{pmatrix}0.25\\0.5\\1\end{pmatrix}$.

2.פתרון: $\det(\boldsymbol{\lambda I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2+1$

נשים לב שהביטוי הנ"ל תמיד גדול מאפס ולכן לא קיים λ שמאפס את הפולינום האופייני, ולכן לא קיימים ערכים עצמיים למטריצה.

3 פתרון: A מטריצה ניליפוטנטית מסדר k. נניח λ ערך עצמי ולכן מתקיים $Av=\lambda v$ עבור v שונה מ-0. נכפול בA^{k-1} ונקבל $A^k v=\lambda^k v$ =0, v שונה מ-אפס ולכן $\lambda=0$. ולכן $\lambda=0$ הוא ערך עצמי של A.

נשים לב שזהו הע"ע עצמי היחיד, מכיוון שאם היה קיים ע"ע שונה מאפס לA- אז החזקה ה-k שלו תהיה ערך עצמי שונה מאפס ל$A^k=0$ וזו סתירה.

4. א. פתרון: נציב בפולינום האופייני *x=0*. נשים לב כי נקבל $f_A(0)=a_0$. מתקיים:

$$f_A(0)=|(xI-A)|=|(0I-A)|=|(-A)|=(-1)^n|A|$$

ב. נוכיח באינדוקציה שמתקיים $A^k v = \lambda^k v$.

עבור *k=1*:

Av=λv

וזה מתקיים לפי הנתון.

נניח נכונות עבור k-1 .

נוכיח עבור k:

$$A^k \text{v}=\lambda^k v$$

נתחיל מאגף שמאל

$$A^k v = A^{k-1}Av = A^{k-1}(\lambda \text{v}) = \lambda(A^{k-1}v) = \lambda\left(\lambda^{k-1}v\right) = \lambda^k v$$

5. פתרון: נמצא את המטריצה המתאימה לפי הבסיס הסטנדרטי.

$$T(1) = 0.5\left(T\left(P_1(x) + P_2(x)\right)\right) = 1.5 + 0.5x$$

$$T(x) = 0.5(T\left(P_1(x)\right) - P_2(x))) = -0.5 - 0.5x$$

$$T(x^2) = T\left(P_3(x)\right) - 0.5T\left(P_1(x) - P_2(x)\right) = x^2 + 0.5x + 0.5$$

ולכן:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את הערך העצמי. נרצה שיתקיים:

$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda - 1.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & \lambda + 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=0$ ולכן נשים לב כי $\lambda = 1$ הוא אכן ערך עצמי (מספיק להציב).

נחשב את הבסיס לווקטור העצמיץ כלומר נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת

$\begin{pmatrix} \mathbf{-0.5} & \mathbf{0.5} & \mathbf{-0.5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$~$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ בסיס.

6.פתרון:

<= נניח שA לא הפיכה. ולכן למערכת משוואת Ax=0 קיים פתרון לא טרוויאלי. ולכן קיים $x \neq 0$ כך ש:

$$\text{Ax} = 0 = 0 * \text{x}$$

ולכן לפי ההגדרה 0 הוא ע"ע של A.

<= נניח ש-0 הוא ע"ע של A.לכן:

$$A * x = 0 = 0 * x$$

עבור x שונה מ-0. ולכן קיים פתרון לא טרוויאלי למערכת הומוגנית ולכן A לא הפיכה.