תרגיל

1. מה עוצמת $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

2. מה עוצמת $X = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(1) \leq f(2)\}$

פתרון: $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כלומר $|X| \leq \aleph$

$f \in X$ $\quad g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N} \setminus \{1,2\}}$ -ל נתאים

$g \longmapsto \begin{cases} g(n) & n>1,2 \\ 1 & n=1,2 \end{cases}$

$h: \mathbb{N}^{\mathbb{N}\setminus\{1,2\}} \longrightarrow X$ חח"ע

$\underbrace{|\mathbb{N}^{\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}|}_{\aleph} \leq |X| \leq \aleph \longrightarrow |X| = \aleph$

3. מה עוצמת $X = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \forall x \notin \mathbb{Q} f(x) = 1\}$

פתרון:

$|X| \leq \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$f \in X \longrightarrow \begin{cases} f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = 1 \\ f|_{\mathbb{Q}} = g \end{cases}$ $\quad g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

$h: \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \longrightarrow X$

$|X| = |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$ $\quad h(f)(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ g(x) & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

תרגיל

תהי $\{A_i\}_{i \in I}$ משפחה של קבוצות הזרות זו לזו כך שעוצמת כל אחת מהן בa. נגדיר $\sum_{i \in I} a = |\bigcup_{i \in I} A_i|$. הוכח כי $\sum_{i \in I} a = |I| \cdot a$

פתרון:

נגדיר A להיות קבוצה נוספת $|A| = a$

אם נמצא $g: I \times A \to \bigcup_{i \in I} A_i$ חח"ע ועל הוכחנו את מה שהיה להוכיח

כיוון שנתון $|A_i| = a$ $\forall i \in I$ קיימת פונק' $f_i: A \to A_i$ חח"ע ועל $(|A_i| = |A| = a)$

$g(\underset{k \in I}{k}, \underset{x \in A}{x}) = f_k(x) \in A_k \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$

g היא על כי כל f_i היא על ולכן בהכרח $a \in \bigcup A_i \Leftarrow a \in A_i$ $\exists i \in I$

יש f_i על לכן קיים מקור לa.

g חח"ע: $g(i,x) = g(j,y)$ $\quad f_i(x) = f_j(y)$ אם $i=j$, f_i חח"ע וסיימנו

$i \neq j$ $\quad A_j \ni f_j(y) = f_i(x) \in A_i$ בסתירה לכך $A_i \cap A_j = \emptyset$

תרגיל

נגדיר F להיות אוסף תתי הקבוצות הסופיות של הטבעיים $F = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| < \aleph_0\}$. מה עוצמתה?

$\forall i \in \mathbb{N} : F_i = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid |X| = i\}$ $\quad |F_i| \le \aleph_0^i = \aleph_0$

$|F| = |\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i| \le \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

חח"ע $\quad g(n) = \{n\} \quad g : \mathbb{N} \to F$

$\aleph_0 \le |F| \le \aleph_0 \longrightarrow |F| = \aleph_0$

נגדיר A להיות אוסף תתי הקבוצות האינסופיות של הטבעיים. מה עוצמתה?

$|P(\mathbb{N})| = |\underbrace{F}_{\text{אוסף תת' של } \mathbb{N} \text{ סופיות}} \cup \underbrace{A}_{\text{אוסף תת' אינסופיות}}| \to 2^{\aleph_0} = \aleph = \aleph_0 + |A| = \max(\aleph_0, |A|) = |A|$

$|A| = \aleph$

תרגיל

נגדיר $A=\{X\subseteq\mathbb{R}:|X|=\aleph_0\}$, מה עוצמתה?

$\aleph\le|A|$ כי ראינו בשיעור קודם שאוסף הת"ק האינסופיות של $\mathbb{N}$

מעוצמה א ואוסף זה מוכל בקבוצה A

כדי להוכיח $|A|\le\aleph$ נגדיר: $F:\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{R})$ (לוקחת $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ שולחת לת"ק של $\mathbb{R}$)

$$F(f)=Im(f)$$

<u>טענה:</u> $A\subseteq Im(F)$. תהי $X\in A$ מהגדרה X מעוצמת הטבעיים $\Leftarrow$ קיימת פונ'

$f:\mathbb{N}\to X$ חח"ע ועל $F(f)=Im(f)=X$ כלומר $X\in Im(F)$

כי f על $\exists F': F':\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to Im(F)\to F'=F$ על

$|A|\le|Im(F)|\overset{?}{\le}|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|=\aleph^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph\to\aleph\le|A|\le\aleph$

תרגיל

נגדיר $A=\{X\subseteq\mathbb{R}:|X|=\aleph\}$, מה עוצמתה?

$A\subseteq P(\mathbb{R})$ כלומר $|A|\le 2^{\aleph}$

נראה $2^{\aleph}\le|A|$ ניקח קטע פתוח $(0,1)$. נסתכל על קבוצת החזקה שלו

$f: P((0,1))\to A$

איך נבנה f חח"ע? $B\mapsto B\cup(3,4)$

נשים לב $B\cup(3,4)\in A$ $|B\cup(3,4)|=|B|+|(3,4)|=\aleph$

f חח"ע $f(B_1)=f(B_2)\to B_1\cup(3,4)=B_2\cup(3,4)\Rightarrow B_1=B_2$ (כי B_1,B_2 זרות ל$(3,4)$)

$|P((0,1))|=2^{\aleph}\le|A|$

לפי קש"ב $|A|=2^{\aleph}$

תרגיל ממבחן תשסח מועד א (ד"ר שי סרוסי וד"ר אלי בגנו)

תהי A קבוצה אינסופית. נסמן

$a = |A|,\ B = P(A),\ F = A\times P(A),\ C = P(A)^A,\ H = B^B$

א. מצא את $|C|$

ב. מצא את $|F\times H|$

ג. מצא את $|\{R : |\mathbb{N}/R| = 2\}|$ המוכלת באוסף יחסי השקילות על הטבעיים.

א) $|C| = |P(A)^A| = (2^a)^a = 2^{aa} = 2^a$

ב) $|F\times H| = |[A\times P(A)]\times B^B|$

$|B| = 2^a \quad B = P(A)$

$|H| = |B^B| = (2^a)^{2^a} = 2^{a\cdot 2^a} = 2^{2^a}$

$|F| = |A\times P(A)| = a\cdot 2^a = 2^a$

$|F\times H| = |F|\cdot|H| = 2^a\cdot 2^{2^a} = 2^{2^a}$

ג) הקבוצה הנ"ל היא כל יחסי השקילות על הטבעיים שיש להם 2 מחלקות שקילות

(לדוג' - זוגיים ואי-ז')

הוכחנו בעבר שכל מח"ש ניתן להתאים לחלוקה. במקרה שלנו לחלוקה של $\mathbb{N}$ של

שתי קבוצות זרות $W = \{\{A, A^c\} \mid A\subseteq\mathbb{N}\}$

נשים לב $\bigcup_{\{A,A^c\}\in W}\{A,A^c\} = P(\mathbb{N})$

הראנו קודם שבהינתן $\{A_i\}_{i\in I}$ זרה $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \sum_{i\in I} a$

$2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{N})| = |W|$

תרגיל ממבחן תשע מועד א (ד"ר שי סרוסי וד"ר אפי כהן)

יהי S יחס על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (קבוצת כל הפונקציות הממשיות), המוגדר על ידי $(f,g)\in S$ אם"ם לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$

1. הוכיחו ש S הינו יחס שקילות
2. תהי $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מצאו את $|[f]|$
3. מצאו את $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S|$

פתרון:

א) 1. רפלקסיבי: עבור $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\forall x\in\mathbb{R}\ \underbrace{f(x)-f(x)=0}_{\in\mathbb{Z}}$ $\longrightarrow$ $(f,f)\in S$

2. סימטריות: אם $(f,g)\in S$ $\forall x: f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$ כיון שיש נגדי לחיבור
בפרט: $g(x)-f(x)\in\mathbb{Z}$ (הנגדי של $f(x)-g(x)$)

3. טרנזיטיביות: $S\ni(f,g),(g,h)$ $\quad$ $f-g\in\mathbb{Z}$ $g-h\in\mathbb{Z}$
בגלל סגירות לחיבור, ש $\mathbb{Z}\ni f-h$ $\quad$ $\underbrace{f-g}_{\mathbb{Z}}+\underbrace{g-h}_{\mathbb{Z}}=f-h$
$(f,h)\in S$

ב) $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\quad |[f]|=?$

$[f]\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S$ $\quad$ $F:[f]\to\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ $\quad$ $f,g\in[f]$

נגדיר: $g\in[f]$ $\quad$ $\forall x: (f-g)(x)\in\mathbb{Z}$

$F(g)=f-g$

חח"ע: יהיו $g,h\in[f]$. $\quad F(g)=F(h)$

$\forall x\in\mathbb{R}\ \cancel{f(x)}-g(x)=\cancel{f(x)}-h(x)$

$\Downarrow$

$\forall x: g(x)=h(x) \longrightarrow$ F חח"ע.

על: תהא p פונקציה $p\in\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ כמובן $f-p$ מקור תחת F

$F(f-p)=f-(f-p)=p$

$|[f]|=|\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}|=\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$

ג) נמצא את עוצמת קבוצת המנה $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S\right|$

נגדיר פונקציה $\lfloor 4.9\rfloor=4$ $\lfloor x\rfloor$ הערך השלם של x $F:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\longmapsto[0,1)^{\mathbb{R}}$

$F(f)=f-\lfloor f\rfloor$

נראה שהפונק' הנ"ל מוגדרת היטב מעל כשמפעילים על קבוצת המנה

מוגדרות: ניקח שתי פונק' מאותה מחלקת שקילות ונראה שהתמונה זהה: $g,f\in[f]$

$$F(g)-F(f)=\underbrace{g-\lfloor g\rfloor}_{<1}\underbrace{-f+\lfloor f\rfloor}_{<1}$$

חיסור של שני מספרים שקטנים מאחד או שלילים

בגלל שההפרש בין f,g הוא שלם הוא שווה לאפס כלומר

$$F(g)-F(f)=0\longrightarrow F(g)=F(f)$$

הראנו ששתי פונקציות שקולות תחת היחס S מגיעות לאותו מקום ע"י F

$$F:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S\longmapsto[0,1)^{\mathbb{R}}$$

חח"ע נניח $F(f)=F(g)$ $f-\lfloor f\rfloor=g-\lfloor g\rfloor \Leftarrow f-g=\underbrace{\lfloor f\rfloor-\lfloor g\rfloor}_{\in\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}}$

$$[f]=[g]\Leftarrow(f,g)\in S\Leftarrow f-g\in\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$$

f,g הן שקולות

על: $r:\mathbb{R}\to[0,1)$ $F(r)=r-\lfloor r\rfloor=r-0=r$

כלומר כל פונקציה שמתמשים לקטע התמונה $[0,1)$ נשלחת לעצמה תחת F.

$$\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S\right|=\left|[0,1)^{\mathbb{R}}\right|=\aleph^{\aleph}=2^{\aleph}$$