תרגיל 11 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

   (א) כל מרכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה סגורה (זכרו שראינו כל מרכיב קשירות הוא קבוצה סגורה).

   (ב) תהי A קבוצה סגוחה וקשירה במרחב X אזי A היא מרכיב קשירות.

   (ג) אם הגרף של $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הוא קבוצה קשירה ב $\mathbb{R}^2$ אז f רציפה.

2. יהי X מרחב מטרי קשיר, האם ההשלמה שלו (למרחב מטרי שלם) היא גם מרחב קשיר?

3. תהי $A\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה בת מניה, הוכיחו כי $\mathbb{R}^2\backslash A$ היא קבוצה קשירה מסילתית.

4. האם הקבוצות הבאות קשירות ב $\mathbb{R}^2$?

   (א) $A=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{Q}\text{ or }y\in\mathbb{Q}\}$

   (ב) $B=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Q}\}$

   (ג) $C=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Q}\text{ or }x,y\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$. (רמז: זכרו שמספיק למצוא תת קבוצה קשירה וצפופה כדי להוכיח שמרחב הוא קשיר)

5. יהי X מרחב עם $Y\subseteq X$ תת מרחב. ניקח $a\in Y$ ונסמן ב K_Y,K_X את מרכיב הקשירות של a ב X ו Y בהתאמה. הוכיחו כי $K_Y\subseteq K_X$.

6. האם $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הקו מנייתית היא קומפקטית?

7. יהי X מרחב ו $\mathcal{B}$ בסיס. הוכיחו כי X קומפקטי אם ורק אם לכל כיסוי $\{B_i\}$ של איברים $B_i\in\mathcal{B}$ יש תת כיסוי סופי.

8. תהי X קבוצה. ניקח קבוצה $A\subseteq X$ ונגדיר טופולוגיה על X שבה הקבוצות הפתוחות הן הקבוצה הריקה וכל הקבוצות שמכילות את A. (ודאו כי זו אכן טופולוגיה). האם X קומפקטית? (הפרידו למקרים לפי הצורך)