

1. הוכיחו כי לכל $0 < a < b$ מתקיים $\frac{b-a}{1+b} < \ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right) < \frac{b-a}{1+a}$.

ראשית נשים לב כי אי-השוויון שקול לאי-השוויון הבא לכל $0 < a < b$:

$$\frac{1}{1+b} < \frac{\ln(1+b) - \ln(1+a)}{b-a} < \frac{1}{1+a}$$

נגדיר $f(x) = \ln(1+x)$. היא רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) ולכן לפי לגרנז' יש $a < c < b$ כך ש-

$$f'(c) = \frac{\ln(1+b) - \ln(1+a)}{b-a}$$

כלומר

$$\frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+b) - \ln(1+a)}{b-a}$$

לכן אי-השוויון שצריך להוכיח שקול ל-

$$\frac{1}{1+b} < \frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+a}$$

וזוה נכון כיוון ש- $a < c < b$.

2. הוכיחו כי לכל $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $\tan(x) \geq x$.

נגדיר $f(x) = \tan(x)$. יהי $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (עבור $x = 0$ אי-השוויון הדרוש נכון לפי הצבה). אז $f(x)$ רציפה בקטע $[0, x]$ וגזירה בקטע $(0, x)$ ולכן לפי לגרנז' יש $0 < c < x$ כך ש-

$$\frac{1}{\cos^2(c)} = \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \frac{\tan(x)}{x}$$

כיוון ש- $0 < c < \frac{\pi}{2}$ אז $0 < \cos(c) < 1$ ולכן $\frac{1}{\cos^2(c)} > 1$ כלומר $\frac{\tan(x)}{x} > 1$ כלומר $\tan(x) > x$. לסיכום לכל $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים

$\tan(x) \geq x$ כדרוש.

3. תהי $f(x)$ גזירה בכל הישר הממשי ומקיימת $f(1) = 0$, וכן $f'(x) \neq 0$ לכל $x \in (0, 1)$. הוכיחו כי קיימת $c \in (0, 1)$ כך ש- $c = \frac{-f(c)}{f'(c)}$.

נגדיר $g(x) = xf(x)$. היא גזירה בכל הישר הממשי כמכפלה של גזירות ולכן גם ודאי רציפה בכל הישר הממשי. מתקיים

$$g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$$

$$g(1) = 1 \cdot f(1) = 1 \cdot 0 = 0$$

לכן לפי משפט רול קיימת $0 < c < 1$ כך ש- $g'(c) = 0$. אך לפי נוסחת גזירה של מכפלה:

$$g'(x) = f(x) + xf'(x)$$

כלומר $f(c) + cf'(c) = 0$ כלומר $c = \frac{-f(c)}{f'(c)}$ כדרוש. (יכלנו לחלק ב- $f'(c)$ כי נתון $f'(x) \neq 0$ לכל $0 < x < 1$).

4. הוכיחו כי למשוואה $2x = \cos(x)$ יש פתרון יחיד

נגדיר $f(x) = 2x - \cos(x)$. היא גזירה ורציפה בכל הישר הממשי. מתקיים $f'(x) = 2 + \sin(x) \neq 0$ לכן לפי מסקנה ממשפט רול הפונקציה $f(x)$ מתאפסת לכל היותר פעם אחת כלומר למשוואה הנתונה יש לכל היותר פתרון אחד. נותר להראות שקיים לה פתרון.

מתקיים

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(20) = 40 - \cos(20) \geq 39 > 0$$

ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $0 < c < 20$ כך ש- $f(c) = 0$. לכן סה"כ למשוואה הנתונה יש בדיוק פתרון אחד.

5. מיצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $x^4 + x^2 = 2$ בקטע $[0,2]$

נגדיר $f(x) = x^4 + x^2 - 2$, היא גזירה ורציפה בכל הישר הממשי ולכן בפרט היא רציפה ב- $[0,2]$ וגזירה ב- $(0,2)$.

מתקיים $f'(x) = 4x^3 + 2x = x(4x^2 + 2)$, לכן $f'(x)$ מתאפסת רק ב- $x = 0$. בפרט היא לא מתאפסת באף נקודה ב- $(0,2)$ כלומר $f(x)$ מתאפסת לכל היותר פעם אחת בקטע. כי אם היו שני אפסים $f(x_1) = f(x_2) = 0$ עם $0 < x_1 < x_2 < 2$ אז היינו מקבלים לפי משפט רול כי ביניהם קיימת נקודה בה הנגזרת מתאפסת. מצד שני $f(1) = 0$, כלומר גם קיים לפחות פתרון אחד. סה"כ קיבלנו כי קיים בדיוק פתרון אחד.

6. מיצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $e^x = 10x$ בקטע $[0,10]$

נגדיר $f(x) = e^x - 10x$. היא גזירה ורציפה בכל הישר הממשי ולכן בפרט רציפה ב- $[0,10]$ וגזירה ב- $(0,10)$.

מתקיים $f'(x) = e^x - 10$ כלומר $f'(x)$ מתאפסת ב- $x = \ln(10)$ (שכן נמצא בקטע הנתון). כלומר $f'(x)$ מתאפסת רק פעם אחת בקטע הנתון ולכן לפי מסקנה ממשפט רול, $f(x)$ מתאפסת לכל היותר פעמיים בקטע הנתון. מתקיים

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = e - 10 < 0$$

ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $0 < c < 1$ כך ש- $f(c) = 0$. כמו כן מתקיים

$$f(7) = e^7 - 70 > 2^7 - 70 = 128 - 70 = 58 > 0$$

ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $1 < c' < 7$ כך ש- $f(c') = 0$. נשים לב כי $c' \neq c$. לכן הראנו שקיימים לפחות שני פתרונות, וכן כי קיימים לכל היותר שני פתרונות, ולכן קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה הנתונה בקטע הנתון.

7. תהי $f(x) = \ln^2(x) - 5\ln(x) + 6$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [e^2, e^3]$ כך ש- $f'(c) = 0$

מתקיים

$$f(e^2) = 0, f(e^3) = 0$$

כמו כן $f(x)$ גזירה לכל $x > 0$ ולכן רציפה ב- $[e^2, e^3]$ וגזירה ב- (e^2, e^3) . לכן לפי משפט רול קיימת $e^2 < c < e^3$ כך ש- $f'(c) = 0$.

8. הוכיחו כי לכל $x > 0, 0 < y < x$, $\alpha > 1$ מתקיים $\alpha y^{\alpha-1}(x-y) < x^\alpha - y^\alpha < \alpha x^{\alpha-1}(x-y)$

אי-השוויון שקול ל-

$$\alpha y^{\alpha-1} < \frac{x^\alpha - y^\alpha}{x-y} < \alpha x^{\alpha-1}$$

נגדיר $f(x) = x^\alpha$. יהיו $0 < y < x$. הפונקציה גזירה בכל הישר הממשי ובפרט רציפה בקטע $[y, x]$ וגזירה בקטע (y, x) . לכן לפי משפט לגרנז' יש $\alpha c^{\alpha-1} = \frac{x^\alpha - y^\alpha}{x-y}$ כלומר $f'(c) = \frac{x^\alpha - y^\alpha}{x-y}$ כך ש- $y < c < x$.

לכן אי-השוויון שקול ל-

$$\alpha y^{\alpha-1} < \alpha c^{\alpha-1} < \alpha x^{\alpha-1}$$

כיוון ש- $\alpha > 1$ הפונקציה $g(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ היא פונקציה עולה ולכן כיוון ש- $y < c < x$ אז אי-השוויון הדרוש אכן מתקיים.

9. הוכיחו שלכל $0 < a < b$ מתקיים $\arctan(b) - \arctan(a) \leq b - a$

נגדיר $f(x) = \arctan(x)$. היא רציפה וגזירה בכל הממשיים, בפרט רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) . לפי משפט לגרנז' יש $a < c < b$ כך ש- $f'(c) = \frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a}$

$$\text{כלומר } \frac{1}{1+c^2} = \frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a} \text{ ולכן}$$

$$\frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a} < 1$$

ולכן (הרי נתון $b - a > 0$):

$$\arctan(b) - \arctan(a) < b - a$$

10. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בכל הישר הממשי. נגדיר $g(x) = f(x) + f(6 - x)$. הוכיחו כי קיים x_0 כך ש- $g'(x_0) = 0$.

מתקיים

$$g(0) = f(0) + f(6)$$

$$g(6) = f(6) + f(0)$$

כלומר $g(0) = g(6)$. הפונקציה $g(x)$ גם גזירה בכל הישר הממשי כי היא הרכבה וסכום של פונקציות גזירות. לכן לפרט היא רציפה ב- $[0,6]$ וגזירה ב- $(0,6)$. לכן לפי משפט רול קיים $0 < x_0 < 6$ כך ש- $g'(x_0) = 0$.

11. הוכיחו כי $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{8} < \arcsin(0.6) < \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15}$

ראשית נשים לב כי $\arcsin(0.5) = \frac{\pi}{6}$ כלומר מה שמנסים להוכיח שקול ל-

$$\frac{\sqrt{3}}{15} < \arcsin(0.6) - \arcsin(0.5) < \frac{1}{8}$$

כלומר שקול ל-

$$\frac{10\sqrt{3}}{15} < \frac{\arcsin(0.6) - \arcsin(0.5)}{0.6 - 0.5} < \frac{10}{8}$$

נגדיר $f(x) = \arcsin(x)$. היא גזירה לכל $-1 < x < 1$ ובפרט היא רציפה ב- $[0.5, 0.6]$ וגזירה ב- $(0.5, 0.6)$. לכן לפי משפט לגרנז' יש $0.5 < c < 0.6$ כך ש- $f'(c) = \frac{\arcsin(0.6) - \arcsin(0.5)}{0.6 - 0.5}$ כלומר כך ש-

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\arcsin(0.6) - \arcsin(0.5)}{0.6 - 0.5}$$

כלומר נשאר להראות כי

$$\frac{10\sqrt{3}}{15} < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{10}{8}$$

אך זה נכון כי $\frac{1}{2} < c < \frac{3}{5}$ לכן $\frac{9}{25} < c^2 < \frac{1}{4}$ לכן $\frac{3}{4} < 1 - c^2 < \frac{16}{25}$ לכן $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{1-c^2} < \frac{4}{5}$ ולכן $\frac{5}{4} < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{2}{\sqrt{3}}$ כדרוש.

12. הוכיחו כי $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x}$ בקטע $(0, \pi)$

נגדיר $f(x) = \sin(x)$. יהי $x \in (0, \pi)$. אז $f(x)$ רציפה ב- $[0, x]$ וגזירה ב- $(0, x)$ ולכן לפי משפט לגרנז' יש $0 < c < x$ כך ש-

$$\cos(c) = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x}$$

לכן נשאר להראות כי $\cos(c) > \cos(x)$ אך זה נכון כי $c < x$ והפונקציה $y = \cos(x)$ היא יורדת בקטע $(0, \pi)$ (כי נגזרתה שלילית שם).

13. תהי $f(x)$ רציפה ב- $[0,3]$ וגזירה פעמיים ב- $(0,3)$ בעלת נגזרת שניה רציפה. נתון $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ וכן $f(2) = 5, f(3) = 8$. הוכיחו שקיים $c \in [0,3]$ כך ש- $f''(c) = 1$.

נתון $f(2) = 5, f(3) = 8$ ולכן לפי משפט לגרנז' בקטע $[2,3]$ (הרי $f(x)$ רציפה בקטע זה וגזירה ב- $(2,3)$) יש $2 < d < 3$ כך ש-

$$f'(d) = \frac{8 - 5}{3 - 2} = 3$$

נתון $f'(0) = 0$, וראינו $f'(d) = 3$, לכן לפי משפט לגרנז' בקטע $[0, d]$ (הרי f' רציפה בקטע זה וגזירה ב- $(0, d)$), כי נתון ש- f' בעלת נגזרת שניה לכן בפרט f' גזירה ובפרט f' רציפה) יש $0 < a < d$ כך ש-

$$f''(a) = \frac{3-0}{d-0} = \frac{3}{d} > 1$$

המעבר $\frac{3}{d} > 1$ כי $d < 3$.

לסיום נתון כי $f''(0) = 0 < 1$ והראנו $f''(a) > 1$ לכן לפי משפט ערך הביניים בקטע $[0, a]$ (והרי $f''(x)$ רציפה בקטע זה - נתון) יש $0 < c < a$ כך ש-

$$f''(c) = 0$$

כדורש.

(דרך אגב: משפט דרבו אומר כי למרות שלא כל נגזרת היא רציפה (אל תתבלבלו עם העובדה כי כל פונקציה גזירה היא בעצמה רציפה), כל נגזרת דווקא כן מקיימת את תכונת ערך הביניים - כלומר, כל נגזרת מקבלת כל ערך בין ערכיה בקצוות קטע. לכן אם היינו לומדים את משפט דרבו היה אפשר להוריד מהתרגיל את הנתון ש- f'' רציפה.)

14. הוכיחו שהפונקציה הבאה גזירה בכל הממשיים, וחשבו את נגזרתה:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

לכל $x \neq 0$ הנגזרת היא לפי נגזרת של מכפלה וכלל השרשרת: $2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{-2x}{x^4}$

בנקודה $x = 0$ נחשב לפי הגדרה:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

(פונקציה שואפת לאפס כפול פונקציה חסומה).

לסיכום,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

15. האם הפונקציה הבאה רציפה? האם היא גזירה?

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x < 1 \\ 4x, & x \geq 1 \end{cases}$$

לכל $x < 1$ ולכל $x > 1$ הפונקציה היא רציפה כי היא מזדהה שם בקטע קטע פתוח סביב x עם פונקציה רציפה.

בנקודה $x = 1$ הפונקציה היא גם כן רציפה כי

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 4x = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$$

כלומר לסיכום הפונקציה היא רציפה (כלומר רציפה בכל הממשיים).

מצד שני הפונקציה היא לא גזירה בכל הממשיים, כי היא איננה גזירה ב- $x = 1$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4(1+h) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 4 = 4$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

16. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה. האם הפונקציה הבאה רציפה? האם היא גזירה?

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)\sin^2(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

נתחיל מרציפות. לכל $x \neq 0$ הפונקציה $g(x)$ היא רציפה כי היא מזדהה שם בקטע פתוח סביב x עם הפונקציה הרציפה $y = \frac{f(x)\sin^2(x)}{x}$, אשר רציפה לפי מכפלה ומנה של פונקציות רציפות. בנקודה $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\sin^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 1 \cdot f(0) \cdot 0 = 0$$

כלומר $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = g(0)$ ולכן $g(x)$ רציפה גם ב- $x = 0$ ולסיכום $g(x)$ רציפה בכל הישר הממשי.

כעת גזירות: לכל $x \neq 0$ לא ניתן לומר דבר, כלומר ייתכן כי $g(x)$ גזירה וייתכן שלא, כי לא נתון לנו דבר על הגזירות של $f(x)$. מצד שני, ב- $x = 0$ הפונקציה $g(x)$ בהכרח כן גזירה:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(h)\sin^2(h)}{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(h)}{h} \right)^2 \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 1^2 f(0) = f(0) \end{aligned}$$

כלומר $g'(0) = f(0)$.