תורת גלואה – תרגול 6

הרחבה גלואה: $[K:F]<\infty$

(1) K/F $\underbrace{\text{נורמלית}}$ $\underbrace{\text{וספרבילית}}$

כל $\alpha\in K$ הפ״מ מתפצל   (כל $\alpha\in K$ הפ״מ ספרבילי

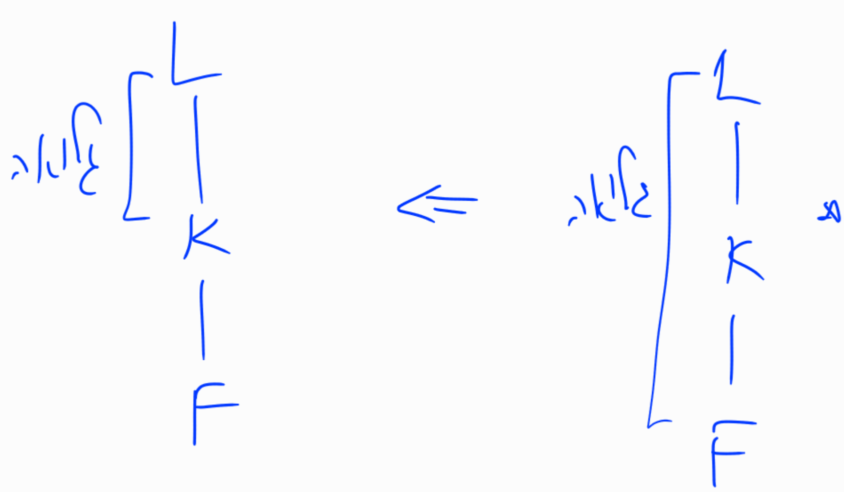
(2) $K=F_f$ שדה פיצול של פולינום ספרבילי

(3) $F=K^G$ שדה שבת ביחס לפעולה $G \curvearrowright K$

(4) $F=K^{Gal(K/F)}$

(5) $|Gal(K/F)|=[K:F]$ $\quad(\leq)$

הערה שימושית:



לכל $\sigma \in Gal(L/F)$, $\Leftarrow$

$$\sigma(K) = K$$

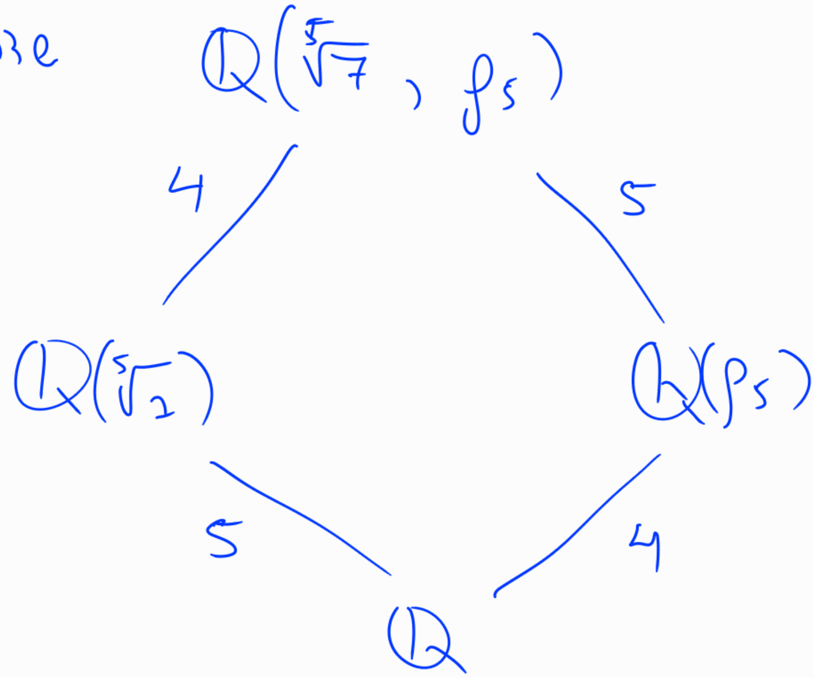
$$K = F(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{\text{שורשים של פולינום מעל } F})$$

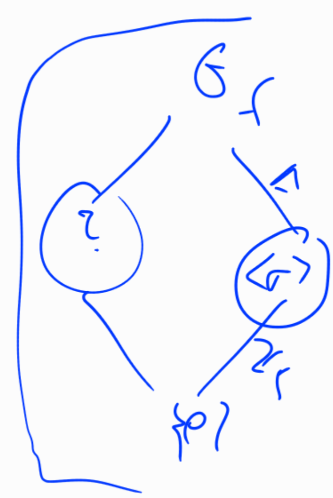
$$\forall i\ \exists j\quad \sigma(\alpha_i) = \alpha_j \implies \sigma(K) = K$$

<u>תרגיל:</u> מצא את חבורת גלואה של $f = x^5 - 7$ מעל $\mathbb{Q}$.

<u>פתרון:</u>

שדה פיצול של f





לכן: $|G_f| = [\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}] = 20$.

(*) $G_f \hookrightarrow S_5$ שיכון טרנזיטיבי

(*) קושי $\Leftarrow$ $\exists \sigma \in G_f$ מסדר 5

מוכרח לקבל את הצורה: $(\ast \ \ast \ \ast \ \ast \ \ast)$

$\langle \sigma \rangle \trianglelefteq G_f$

(א) ננסה למצוא את ת"ח 2-סילו: [ת"ח 5-סילו]

$\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7})$ הרחבה גלואה ולכן:

$$\left|Gal\left(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7})\right)\right| = 4$$

זוהי לכן ת"ח 2-סילו. נגדיר הומו' צמצום:

$$\varphi : Gal\left(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7})\right) \longrightarrow Gal\left(\mathbb{Q}(\rho_5)/\mathbb{Q}\right)$$

$$\pi \longmapsto \pi|_{\mathbb{Q}(\rho_5)}$$

הומ' זה מוגדר היטב מכיוון ש- $\mathbb{Q}(\rho_5)/\mathbb{Q}$ גלואית

$$(\rho_5, \rho_5^2, \rho_5^3, \rho_5^4)$$

ולכן ההעתקה מתחילה השיגור:

$$\pi(\mathbb{Q}(\rho_5)) = \mathbb{Q}(\rho_5).$$

φ איזומורפיזם: אם $\pi \in Ker\,\varphi$ אז

$\pi|_{\mathbb{Q}(\rho_5)} = id$ וגם כן $\pi|_{\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7})} = id \Rightarrow \pi = id$.

וגם החבורות מסדר 4 $\Rightarrow \varphi \cong$.

לזכרים:

$$\left(Gal\left(\mathbb{Q}(\rho_n)/\mathbb{Q}\right) \cong U_n\right)$$

$$\rho_n \longmapsto \rho_n^k$$

($e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ k זר ל-n)

$(\tau: \rho_5 \mapsto \rho_5^2)$

בפועל: $Gal\left(\mathbb{Q}(\rho_5)/\mathbb{Q}\right) \cong \mathbb{Z}_4$, נבחר יוצר τ.

ונרחיב את τ ל- $Gal\left(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7})\right)$ (נניח φ).

נשים לב כי $G_f = \langle \sigma, \tau \rangle$.

σ: איבר מסדר 5 ''נורמלי''

τ: איבר מסדר 4

נותר לברר יחסים בין τ, σ.

מכיוון ש- $\langle\sigma\rangle$ נורמלית נרצה לבדוק את פעולת τ עליה.

נזכיר כי σ מחזור מאורך 5 בפעולה על השורשים $\Leftarrow$

$\exists\ 0 < i < 5:$ $\quad \cancel{\sigma^i}(\sqrt[5]{7}) = \rho_5 \sqrt[5]{7}$

בה"כ נניח $i=1$

$\langle\sigma\rangle = \langle\sigma^i\rangle$

$\sigma(\rho_5) = \rho_5$

כי אם $\sigma(\rho_5) = \rho_5^k \Leftarrow$ σ מסדר 5

$$\rho_5 = \sigma^5(\rho_5) = \rho_5^{k^5} \Rightarrow \rho_5^{k^5-1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \mid k^5 - 1$$

$$\Rightarrow k = 1$$

---

* $\tau\sigma\tau^{-1}(\sqrt[5]{7}) = \tau\sigma(\sqrt[5]{7}) = \tau(\rho_5\sqrt[5]{7}) =$

$$= \rho_5^2\sqrt[5]{7}) =$$

$$= \sigma^2(\sqrt[5]{7})$$

* $\tau\sigma\tau^{-1}(\rho_5) = \rho_5^i = \sigma^2(\rho_5^i)$

מסקנה:

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$$

נשים לב כי $G_f \cong \langle \tau, \sigma \mid \tau^4 = 1,\ \sigma^5 = 1,\ \tau\sigma = \sigma^2\tau \rangle$

מבירור ש. הללו כי היחסים שמקיימים ה- G_f וגם אין

קל לראות כי בגלל ש. יש לכל היותר 20 איברים

$\{\tau^i\sigma^j\}_{i=0,\ j=0}^{3\quad 4}$ ולכן $|G_f| = 20$.

$\cong \varphi \quad \mu_f$

. $G_f \cong \mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$