חוברת תרגילים אלגברה לינארית 2

קווין מנדלבאום תיכונסטים תשפ"א

סמסטר א שנה א

1.לכסון מטריצות ואופרטורים

1. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה כך ש- $rank(A) = 1$ ו-$tr(A) = 3$. מצאו את הערכים העצמיים של A.

2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכח כי אם A מקיימת את השוויון: $A^2 + A + I = 0$ אז אין ל-A ע"ע ממשיים.

3. תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ a & d & 0 & 0 \\ 0 & b & d & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ $\leftrightarrow$ $a = b = c = 0$

4. יהי $V = \mathbb{C}_n[x]$ ויהא $T: V \to V$ אופרטור המוגדר להיות:

$$T\big(p(x)\big) = p' + x^n \cdot p(0)$$

הוכיחו כי T לכסין מעל $\mathbb{C}$.

5. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה כך שסכום כל עמודה שלה שווה ל0. הוכח כי A לא הפיכה.
6. קבעו האם המטריצה הבאה לכסינה מעל $\mathbb{R}$, אם כן, מצאו לה צורה אלכסונית ומטריצה מלכסנת P, אם לא, למה לא?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה סימטרית. הוכיחו כי A לכסינה מעל הממשיים. (אין להשתמש במשפטי הלכסון האורתוגונלי, תחשבו מחוץ לקופסא)
8. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה כך ש-$\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע עם ו"ע מתאים $\vec{v}$. השתמשו ב-λ וב-$\vec{v}$ למציאת ע"ע וו"ע מתאים עבור כל אחת מן המטריצות הבאות

א. $k \in \mathbb{N}: A^k$
ב. A^{-1}
ג. $(\alpha \in \mathbb{F})\ A - \alpha I$

9. תהי A מטריצה לכסינה ותהי D צורתה האלכסונית ו-P המטריצה המלכסנת, כלומר:
$$A = PDP^{-1}$$
עבור כל אחת מהמטריצות הבאות B הופריכו את הטענה שB מטריצה לכסינה.
אם B אכן לכסינה, השתמשו ב-D, P למציאת צורה אלכסונית ומטריצה מלכסנת.
א. $(k \in \mathbb{N}): B = A^k$
ב. $B = A^t$
ג. $B = A \cdot C$ (כאשר $C \in \mathbb{F}^{n\times n}$)
ד. $B = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$

10. תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת את השוויון $A^2 + b\cdot A + c\cdot I = 0$ עבור $b, c \in \mathbb{F}$ כך ש-
$$c \neq \frac{1}{4}b^2$$
הוכח\הפרך: A לכסינה מעל המרוכבים.

11. מצאו צורה אלכסונית ומטריצה מלכסנת מעל המרוכבים עבור המטריצה
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$$

12. חשב $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{17}$

13. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $p \in \mathbb{F}_n[x]$ פולינום.
א. הוכיחו כי אם $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של A עם ו"ע $\vec{v}$, אז $p(\lambda)$ ע"ע של $p(A)$. מהו הווקטור העצמי המתאים?
ב. הוכיחו כי אם A לכסינה ו-D צורה אלכסונית שלה, כך ש-$A = PDP^{-1}$, אז $p(D)$ צורה אלכסונית של $p(A)$. מצאו מטריצה מלכסנת מתאימה.

14. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ויהי $p(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 4$

מצאו צורה אלכסונית ומטריצה מלכסנת של $p(A)$.

15. יוסף טען בפני שאול שהפולינום $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ מאפס את המטריצה הממשית

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

עזרו לשאול להשיב ליוסף החצוף ולמצוא פולינום בעל מעלה חיובית מינימלית שמאפס את A

16. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $T:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}^{n\times n}$ המוגדר: $T(B)=B\cdot A$. הוכיחו כי $m_T(x)=m_A(x)$ והסיקו מכך כי T לכסין אם ורק אם A לכסינה.
17. יהי $T:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n}$ אופרטור המוגדר כך: $T(A)=A+A^t$. מצאו את $m_T(x),p_T(x)$
18. יהיו $\alpha\in\mathbb{R},n\geq 2$ ותהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת את השוויון
$$A^n+\frac{1}{4}\alpha^2A^{n-2}=\alpha A^{n-1}$$
הוכיחו כי A דומה למטריצה משולשית.

19. שלשו את המטריצה הבאה (אם ניתן)
$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\4&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

2. <u>תתי מרחב אינווריאנטים וכל שאר הכיף</u>

1. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי ויהיו $U_1,U_2\subseteq V$ תתי מרחב T אינווריאנטים. הוכיחו שגם $U_1\cap U_2$ ו-U_1+U_2 הם תתי מרחב T אינווריאנטים.
2. מצאו את כל תתי המרחב ה-T **אינווריאנטים** של $V=\mathbb{R}^2$ כאשר T הוא האופרטור המוגדר: $T(v)=v\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
רמז:מהו מרחב אינווריאנטי ממימד 1?

3. הוכיחו: אם $S,T:V\to V$ מתחלפות, $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע של S ו$V_\lambda\subseteq V$ הוא המ"ע המתאים, אז V_λ הוא תת מרחב T **אינווריאנטי**
4. מצא עבור האופרטור הבא תתי מרחב $U_1,\ldots,U_k\subseteq V$ T-אינווריאנטים כך ש-
$$V=U_1\oplus\ldots\oplus U_k$$
וכך שלכל i הפולינום המינימלי $m_{T|_{U_i}}(x)$ הוא חזקה של פולינום אי פריק,וכך שk הוא המינימלי האפשרי.
$$T:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$$
$$T(p)=p+p(0)(1+x)+p'(0)x+p''(0)x^2$$
5. ***טוני וברוס מנסים לפתור בעיה פיזיקלית סבוכה על מנת להציל את העולם!!. עזרו להם להוכיח את הלמה פורצת הדרך הבאה:
יהי $T:V\to V$ לכסין, מעל $\mathbb{F}$ עם ע"ע $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{F}$, נסמן
$$E_1,\ldots,E_k:V\to V$$

להיות ההטלות על $V_{\lambda_1},\dots,V_{\lambda_k}$ בהתאמה, ויהי $p\in\mathbb{F}[x]$ פולינום כלשהו. אז מתקיים:

$$p(T)=\sum_{i=1}^{k}p(\lambda_i)\cdot E_i$$

3. צורות ז'ורדן

1. הוכח כי שתי מטריצות $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ הן דומות אם ורק אם יש להן אותה הצורת זורדן.
2. **הוכיחו** או **הפריכו**:
(א) תהיינה $A,B\in\mathbb{C}^{3\times 3}$ כך ש-$p_A(x)=p_B(x)$ וגם $m_A(x)=m_B(x)$. אזי A,B דומות.
(ב) תהיינה $A,B\in\mathbb{C}^{(n\times n)}$ כך ש-$p_A(x)=p_B(x)$ וגם $m_A(x)=m_B(x)$. וגם לכל ע"ע λ של A,B יש את אותו הריבוי הגיאומטרי. אז A,B דומות.
3. מצא צורת זורדן למטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}9&7&3\\-9&-7&-4\\4&4&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&0&0\\2&1&3\\5&0&4\end{pmatrix}$$

4. מה יכולות להיות צורות הזורדן של מטריצה A כך שהפולינום האופייני שלה הוא
$$p_A(x)=(x-3)^5(x+5)^3$$
וגם מתקיים כי הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 3 הוא 4.

5. הוכיחו שלכל מטריצה מרוכבת הפיכה יש שורש. כלומר אם $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ הפיכה, אז קיימת $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש $B^2=A$.
6. הוכח כי מטריצה A היא לכסינה אם ורק אם הפולינום המינימלי של A מתפרק לגורמים לינאריים שונים.
7. תהי A מטריצה ריבועית מרוכבת המקיימת $A^4=-A^2$.
   א. הוכח כי ל-A יש לכל היותר 3 ע"ע שונים.
   ב. הוכיחו כי אם A לכסינה אז $A^3=-A$
   ג. נתון ש-A הנ"ל היא מסדר 3x3 אך לא לכסינה. מצאו את כל צורות הזורדן האפשריות עבורה.

4. מרחבי מכפלה פנימית ושאר חברים

1. קבעו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא מגדירה מכפלה פנימית על המרחב הנתון V:
(א) $V=\mathbb{C}^{n\times n},\langle A,B\rangle=tr(A\cdot B^*)$
(ב) $V=\mathbb{C}^2;\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+u_2v_2$

2. קבעו עבור אליו ערכים של הפרמטרים $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ הפונקציה הבאה היא מ"פ על $V=\mathbb{R}^2$
$$f(\vec{u},\vec{v})=av_1\cdot u_1+b\cdot v_1\cdot u_2+cv_2\cdot u_1+du_2\cdot v_2$$
3. תהי $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ ויהי $U\subseteq\mathbb{R}^{4\times 1}$ מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות $A\vec{x}=\vec{0}$. ויהי $W=U^{\perp}$ תת-המרחב הניצב ל-U ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^{4\times 1}$

א. הוכיחו כי לכל $u \in U, w \in W$ מתקיים $||u+w|| = ||u-w||$

ב. מצאו בסיס או"נ של U ובסיס או"נ של W

ג. יהי $v = (1,1,1,1)$. מצאו $u \in U, w \in W$ כך ש$v = u + w$

4. הופריכו:

יהי V ממ"פ, $\dim(V) \geq 2$ ויהיו $u, v \in V$. אם $||u+v|| = ||v|| = ||u||$ אז $u = v = 0$

5. הופריכו:

יהי V ממ"פ ויהיו $W, U \subseteq V$ תת-מרחבים. אזי מתקיים

$$W^{\perp} \cap U^{\perp} = (W \cap U)^{\perp}$$

6. יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$

נגדיר:

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

א. הוכח כי זו אכן מכפלה פנימית על V

ב. מצא בסיס או"נ של V ביחס למכפלה הפנימית הזו

ג. מצאו את ההטלה הניצבת של הווקטור $h = 1 + x + x^2$ על תת-המרחב W המורכב מהפולינומים הקבועים.

ד. האם הגדרה בסעיף א נותנת מכפלה פנימית ל-$\mathbb{R}_3[x]$? נמקו.

7. יהי V ממ"פ. נזכר בהגדרת ההטלה האורתוגונלית על תת-מרחב: עבור תת מרחב U נגדיר $\pi_U(\vec{v}) = \sum_{u \in S} \pi_u(v)$ כאשר S בסיס אורתונורמלי של U.

א. הוכיחו כי π_U הוא אופרטור הרמיטי

ב. נתון כי π_U הוא אוניטרי. מצאו את U

ג. יהי T אופרטור נורמלי שכל הע"ע שלו הם 0 או 1. הוכח כי $T = \pi_{Im(T)}$.

8. יהי V ממ"פ ויהי $T: V \to V$ אופרטור המקיים:

$$T^2 = \frac{1}{5}(2T + 3T^*)$$

א. הוכיחו: T נורמלי.

ב. הוכיחו כי לכל פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ גם $p(T)$ נורמלי.

ג. תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית. הוכיחו כי לכל פולינום $p \in \mathbb{R}[x]$ מתקיים כי $p(A)$ הרמיטית. האם הטענה נכונה גם עבור כל פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$?

9. הוכיחו כי אם T אופרטור צל"ע אז כל שני ו"ע מע"ע שונים הם מאונכים.

10. תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ או"ג. הוכיחו כי אם $\frac{1}{2}(A+B)$ או"ג אז $A = B$

11. יהי B בסיס אורתונורמלי כך ש $[T]_B = A$ ו-A אלכסונית. הראו כי ניתן לכתוב את T כצ"ל של הטלות אורתוגונליות. כלומר, קיימות הטלות $\pi_{U_1}, \dots, \pi_{U_k}$ וסקלרים $a_1, \dots, a_k$ כך שמתקיים: $T = \sum a_i \pi_{U_i}$

12. הופריכו:

א. אם הפ"א של האופרטור הוא $p_T(x) = x^2(x-1)$ אז האופרטור הוא הטלה או"ג

ב. אם הפ"מ של האופרטור הוא $m_T(x) = x(x-1)$ אז האופרטור הוא הטלה או"ג

13. יהי $W \subseteq \mathbb{R}^4 = span\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

א. מצאו את $W^{\perp}$

ב. מצאו בסיס או"נ ל-$W^{\perp}$

14. יהי $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ עם המ"פ $\langle A,B\rangle = tr(AB^t)$. לכל $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ נגדיר אופרטור $T_M: V \to V$ ע"י

$$T_M(A) = M \cdot A$$

הראו כי T_M או"ג אם ורק אם $M^tM = I$

15. יהי V ממ"פ ותהי $T: V \to V$ הע"ל ויהי $U \subseteq V$ תת-מרחב. הוכיחו כי U הוא תת-מרחב T-אינווריאנטי אם ורק אם $U^\perp$ הוא תת-מרחב T^*-אינווריאנטי.

16. לכסנו או"ג את המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

17. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ או"ג כך ש$\det(A) = -1$.

א. הוכיחו כי $-1 \in \sigma(A)$

ב. הוכיחו כי $1 \in \sigma(A)$ כאשר נתון בנוסף כי n זוגי.

5. מבחנים לדוגמא, תהנו ותחכימו יחכמים

מבחן מספר 1:

1. תהא $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ויהא $p_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ הפ"א של A.
יהא בנוסף $B(x) = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$ כך ש: $B(A) = 0$ וכן: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = c_1c_2c_3$.
האם נובע כי בהכרח $B(x) = p_A(x)$?

2. נתון האופרטור $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ כך שהפולינום האופייני של T הינו:

$$p_T(x) = x^5 + x^4 - 2x^3$$

האם T לכסין?

3. תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ המקיימת כי: $\frac{1}{12}A = [A^2 - 7A + 16I]^{-1}$
מצא את כל צורות הזורדן האפשריות של A

4. יהי V ממ"פ נוצר סופית ויהי $T: V \to V$ אופרטור כך ש-$T = T^2$. הוכיחו כי קיים תת-מרחב $W \subseteq V$ כך ש $\forall w \in W\ T(w) = w$, ו-$T(u) = 0$ לכל $u \in W^\perp$ אם ורק אם T צל"ע

5. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{F}$. ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי כך שמתקיים $T = T^2$.

א. האם T לכסין?

ב. הוכיחו כי האופרטור $T + I$ הפיך ומצאו את הפולינום $f(x)$ מהדרגה הנמוכה ביותר כך שיתקיים $f(T) = (T+I)^{-1}$

ג. הוכיחו כי $Im(T)^\perp = Ker(T)$ אם ורק אם T צל"ע

מבחן מספר 2:

1. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$. יהי B בסיס ל-V ותהי G_B מטריצת גראם של המ"פ הסטנדרטית ביחס ל-B.
יהי $T: V \to V$ אופרטור ותהי $A = [T]_B$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת של T^* לפי B

ב. יהי $E = \{e_1, e_2\}$ בא"נ של V. יהי $B = \{e_1, e_1 + e_2\}$ בסיס אחר. תהי $[T]_B = \begin{pmatrix} i & 2i \\ -i & -i \end{pmatrix}$

הופריכו: T צל"ע, T אוניטרי.

2. נתונה $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 \\ 3a & 0 & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}$

א. לאילו ערכים של a המטריצה לכסינה מעל $\mathbb{C}$? ומעל $\mathbb{R}$?

ב. עבור כל ערך a מסעיף א, הציגו את הצורה האלכסונית של A- D_a

ג. לשאר הערכים, מצאו צורת זורדן ל-A.

3. הופריכו את הטענות הבאות:

א. אם $\lambda^2 \in \sigma(A^2)$ אז לפחות אחד מ-$\{\lambda, -\lambda\}$ הוא ע"ע של A.

ב. קיימת מטריצה ריבועית מרוכבת לא לכסינה A כך ש-$A^k = I$. $(k \in \mathbb{Z}^+)$

ג. יהי V ממ"פ ויהי T אופרטור על V. אזי $Im(T)^\perp = \ker(T^*)$

ד. תהי A מטריצה לכסינה. אזי A^2 לכסינה.

ה. תהי A^2 מטריצה לכסינה והפיכה. אזי A לכסינה.

4. יהי V ממ"פ. הוכיחו כי אופרטור $T: V \to V$ הוא אוניטרי אם ורק אם הוא משמר נורמה. כלומר $||v|| = ||Tv||$ לכל $v \in V$.

5. תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ כך שמתקיים:

א) $tr(A) = 0$

ב) $\det(A - iI) = 0$

ג) $rank(A - I) = 3$

חשבו A^{80}.

מבחן מספר 3:

1. יהי T אופרטור אוניטרי וצמוד לעצמו. הופריכו: $T^3 = T$

2. תהי A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו כי אם $A + A^* = AA^*$ אז A לכסינה אוניטרית.

3. הופריכו: יהי T אופרטור ויהי $S = TT^*$. אזי כל הע"ע של S הם ממשיים ואי שליילים

4. תהי A מטריצה.

א. הוכיחו כי $\ker(A^*A) = \ker(A)$

ב. הוכיחו כי $rank(AA^*) = rank(A^*A)$

בהצלחה בבחינה ימלכים!