משוואות לינאריות מסדר גבוה (סדר שני)

תזכורת

משוואה לינארית מסדר גבוה היא משוואה דיפרנציאלית מהצורה:

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y + b(x)$$

אם כל המקדמים $a_{n-1}(x), a_{n-2}(x), \cdots, a_0(x), b(x)$ רציפים, אזי משפט קיום ויחידות תקף, כלומר, בהינתן תנאי התחלה $y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{(n-2)}(x_0), y^{(n-1)}(x_0)$, קיים פתרון יחיד למשוואה המקיים את תנאי ההתחלה.

תזכורת

1. קבוצת כל הפתרונות למשוואה לינארית הומוגנית מסדר n מהווה מרחב ווקטורי n מימדי.
2. פתרון כללי למשוואה לינארית אי הומוגנית הוא מהצורה $y = y_h + y_p$, כאשר y_h פתרון כללי למשוואה ההומוגנית המתאימה ו – y_p פתרון פרטי למשוואה האי הומוגנית.

תזכורת (דטרמיננטת וורונקיאן)

עבור פונקציות $y_1, \cdots, y_n$, דטרמיננטת וורונסקיאן:

$$\boxed{\mathcal{W}(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}$$

תזכורת

$\mathcal{W}(x_0) = 0$ בנקודה אחת $\Leftrightarrow$ $\mathcal{W}(x) = 0$ בכל התחום.

תזכורת (משפט אבל)

$$\mathcal{W}'(x) = a_{n-1}(x) \cdot \mathcal{W}(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, dt}$$

הערה

כאשר מדובר על משוואה לינארית הומוגנית מסדר 2:

$$\mathcal{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x) = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1{}'$$

ניתן להשתמש בכך כדי להגיע מפתרון פרטי לפתרון כללי, שכן, y_1 נתון, $\mathcal{W}(x)$ ידוע מתנאי ההתחלה וממשפט אבל ו – y_2 פתרון למשוואה לינארית מסדר ראשון.

■

דוגמה

$$\boxed{y'' - \frac{6}{x^2} \cdot y = 0}$$

נמצא פתרון פרטי. ניקח:

$$y \coloneqq x^3$$

$$\Downarrow$$

$$y' = 3x^2$$

$$\Downarrow$$

$$y'' = 6x$$

$$\Downarrow$$

$$y'' - \frac{6}{x^2} \cdot y = 6x - \frac{6}{x^2} \cdot x^3$$

$$y'' - \frac{6}{x^2} \cdot y = 0$$

לכן:

$$y_1(x) = x^3 \,, y_1' = 3x^2$$

פתרון פרטי למשוואה.

נפתור את בעיית קושי:

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{6}{x^2} \cdot y = 0 \\ y(1) = c_1 \\ y'(1) = c_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(1) = \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 3 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(1) = c_2 - 3c_1$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(1) \cdot e^{\int_1^x 0\, dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(1)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x) \coloneqq k$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x) = \begin{vmatrix} x^3 & y_2 \\ 3x^2 & {y_2}' \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$k = x^3 \cdot y_2' - 3x^2 \cdot y_2$$

נפתור בשיטת גורם אינטגרציה:

$$y_2' - \frac{3}{x} \cdot y_2 = \frac{k}{x^3}$$

$$\Downarrow$$

$$I(x) = e^{\int -\frac{3}{x} dx}$$

$$\Downarrow$$

$$I(x) = e^{-3\log|x|}$$

$$\Downarrow$$

$$I(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x^3} \cdot y_2' - \frac{3}{x^4} \cdot y_2 = \frac{k}{x^6}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{1}{x^3} \cdot y_2\right)' = \frac{k}{x^6}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x^3} \cdot y_2 = -\frac{1}{5}k \cdot \frac{1}{x^5} + k_2$$

$$\Downarrow$$

$$y_2(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x^2} + k_2 \cdot x^3$$

■

שיטות להפקת מידע נוסף ממידע חלקי

1. שיטת הורדת סדר

בהינתן פתרון יחיד למשוואה ההומוגנית המתאימה, נוריד את הבעיה למשוואה מסדר $n-1$.

2. שיטת וריאציית מקדמים

בהינתן כל הפתרונות למשוואה ההומוגנית המתאימה, נפתור את המשוואה האי הומוגנית.

3. פונקציית גרין

כלי לעבור מפתרונות למשוואה ההומוגנית המתאימה לפתרונות למשוואה האי הומוגנית.

משפט

תהי:

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y + b(x)$$

משוואה לינארית מסדר n.

נניח שהפונקציה $y_0(x)$ פותרת את המשוואה ההומוגנית המתאימה.

אם נציב $y(x) = z(x) \cdot y_0(x)$, אזי $z'(x)$ פותר משוואה לינארית מסדר $n-1$.

הערה

הפתרון הכללי עבור z' הוא $n-1$ מימדי, לכן הפתרון הכללי עבור z הוא n מימדי.

דוגמה

$$\boxed{y'' - \frac{6}{x^2} \cdot y = x \cdot \log x}$$

$y_0(x) = x^3$ פתרון למשוואה ההומוגנית המתאימה (ראינו).

נציב:

$$y(x) = z(x) \cdot y_0(x)$$

$$\Downarrow$$

$$y'(x) = z'(x) \cdot x^3 + z(x) \cdot 3x^2$$

$$\Downarrow$$

$$y''(x) = z''(x) \cdot x^3 + z'(x) \cdot 6x^2 + z(x) \cdot 6x$$

נציב במשוואה:

$$\left(x^3 \cdot z''(x) + 6x^2 \cdot z'(x) + 6x \cdot z(x)\right) - \frac{6}{x^2} \cdot \left(x^3 \cdot z(x)\right) = x \cdot \log x$$

נציב:

$$w \coloneqq z'$$

$$\Downarrow$$

$$x^3 \cdot w' + 6x^2 \cdot w = x \cdot \log x$$

$$\Downarrow$$

$$w' + \frac{6}{x} \cdot w = \frac{\log x}{x^2}$$

נפתור בשיטת גורם אינטגרציה:

$$I(x) = e^{6 \cdot \log|x|}$$

$$\Downarrow$$

$$I(x) = x^6$$

$$\Downarrow$$

$$(w \cdot x^6)' = x^4 \cdot \log|x|$$

$$\Downarrow$$

$$w \cdot x^6 = \int x^4 \cdot \log|x| \; dx$$

ניעזר באינטגרציה בחלקים, ונקבל:

$$w \cdot x^6 = \frac{x^5}{5} \cdot \log|x| - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} \; dx$$

$$\Downarrow$$

$$w \cdot x^6 = \frac{x^5}{5} \cdot \log|x| - \frac{x^5}{25} + c_1$$

$$w=\frac{\log|x|}{5x}=\frac{1}{25x}+\frac{c_1}{x^6}$$

$$\Downarrow$$

$$z=\frac{1}{10}\cdot(\log x)^2-\frac{1}{25}\cdot\log x-c_1\cdot\frac{1}{x^5}+c_2$$

$$\Downarrow$$

$$y=\overbrace{\frac{1}{10}\cdot x^3\cdot(\log x)^2-\frac{1}{25}\cdot x^3\cdot\log x}^{\text{פתרון כללי}}\overbrace{-c_1\cdot\frac{1}{x^2}+c_2\cdot x^3}^{\text{פתרון הומוגני כללי}}$$

■