אינפי 1 – מתמטיקה – פתרון תרגיל 3

1. **מצאו את החלק הסטנדרטי של המספרים הבאים (או הסבירו מדוע לא קיים חלק סטנדרטי).**

i. $\frac{2H^2-H+5\epsilon}{3H^2+5H-6-4\epsilon}$ באשר H אינסופי, ϵ אינפיניטסימלי.

$$st(\frac{2H^2-H+5\epsilon}{3H^2+5H-6-4\epsilon})=st(\frac{2-\frac{1}{H}+\frac{5\epsilon}{H^2}}{3+\frac{5}{H}-\frac{6}{H^2}-\frac{4\epsilon}{H^2}})=\frac{st(2)-st(\frac{1}{H})+st(\frac{5\epsilon}{H^2})}{st(3)+st(\frac{5}{H})-st(\frac{6}{H^2})-st(\frac{4\epsilon}{H^2})}=\frac{2-0+0}{3+0-0-0}=\frac{2}{3}$$

להלן נקצר צורת כתיבה מלאה זו, ונקפוץ ישר מהשלב השני לשלב האחרון.

ii. $\frac{(2H+1)^3-2H-4}{(H-5)^3+4}$ באשר H אינסופי.

$$st(\frac{(2H+1)^3-2H-4}{(H-5)^3+4})=st(\frac{8H^3+...}{H^3+...})=st(\frac{8+\epsilon}{1+\delta})=\frac{8}{1}=8 .$$

הסבר לחישוב לעיל: הביטוי הגדול ביותר במונה הוא $8H^3$ ובמכנה H^3. לא כתבנו את שאר הגורמים אלא החלפנו אותם ב "..." כיוון שתכף אנחנו מחלקים ב- H^3 והם יהפכו להיות אינפיניטסימליים ϵ,δ, לכן המספרים המדויקים המופיעים שם לא חשובים לנו. כל שחשוב שהם מסדר גודל יותר קטן מ- H^3.

iii. $\frac{(9H-8)^5-(7H-6)^4}{12+14H^6}$ באשר H אינסופי.

לאחר פתיחת סוגריים במונה נקבל כי החזקה הגבוהה ביותר היא H^5 ובמכנה היא H^6, כלומר כפי שכבר ראינו פעמים רבות, ע"י חילוק ב- H^6 נקבל כי המספר הוא אינפיניטסימל ובפרט החלק הסטנדרטי שלו הוא 0.

iv. $\frac{9-a}{3-\sqrt{a}}$ באשר $a\approx 3, a\neq 3$.

$$st(\frac{9-a}{3-\sqrt{a}})=st\frac{(9-a)}{st(3-\sqrt{a})}=\frac{9-3}{3-\sqrt{3}}=\frac{6}{3-\sqrt{3}}$$

v. $\frac{64-2a}{(8-a)(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a})}$ באשר $a\approx 32, a\neq 32$.

$$st(\frac{64-2a}{(8-a)(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a})})=\frac{st(64-2a)}{st((8-a)(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}))}=\frac{64-64}{(8-32)(\sqrt{32}-\sqrt[3]{32})}=0$$

vi. $\sqrt{H+12}-\sqrt{H-24}$ באשר H אינסופי.

$$st(\sqrt{H+12}-\sqrt{H-24})=st(\frac{(\sqrt{H+12}-\sqrt{H-24})(\sqrt{H+12}+\sqrt{H-24})}{\sqrt{H+12}+\sqrt{H-24}})=st(\frac{(H+12)-(H-24)}{\sqrt{H+12}+\sqrt{H-24}})=$$

$$=st(\frac{36}{\sqrt{H+12}+\sqrt{H-24}})=st(\frac{\frac{36}{\sqrt{H}}}{\sqrt{1+\frac{12}{H}}+\sqrt{1-\frac{24}{H}}})=\frac{0}{1+1}=0$$

.vii $\frac{\sqrt{36-\epsilon}-6}{16\epsilon}$ באשר $\epsilon\approx 0, \epsilon\neq 0$

$$st(\frac{\sqrt{36-\epsilon}-6}{16\epsilon})=st(\frac{(\sqrt{36-\epsilon}-6)(\sqrt{36-\epsilon}+6)}{16\epsilon(\sqrt{36-\epsilon}+6)})=st(\frac{-\epsilon}{16\epsilon(\sqrt{36-\epsilon}+6)})=st(\frac{-1}{16(\sqrt{36-\epsilon}+6)})=\frac{-1}{16(6+6)}=\frac{-1}{192}$$

.viii 33554432ϵ באשר $\epsilon\approx 0$.

$$st(33554432\epsilon)=st(33554432)st(\epsilon)=33554432\cdot 0=0$$

.ix $\frac{1}{\epsilon}\sqrt{\epsilon}$ באשר $\epsilon\approx 0, \epsilon>0$.

$st(\frac{1}{\epsilon}\sqrt{\epsilon})=st(\frac{1}{(\sqrt{\epsilon})^2}\sqrt{\epsilon})=st(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})$. זהו מספר אינסופי לכן אין לו חלק סטנדרטי.

.x $\frac{\epsilon-5}{4\epsilon+12\epsilon^2}$ באשר $\epsilon\approx 0, \epsilon\neq 0$.

גם כאן זהו מספר אינסופי (המונה משמעותי, המכנה אינפי') לכן אין לו חלק סטנדרטי.

2. הוכיחו כי אם $a\approx b$ וכן $b\approx c$ אז $a\approx c$.

$a\approx b$ כלומר $a-b\approx 0$. וכן $b\approx c$ כלומר $b-c\approx 0$. ראינו כי ניתן לחבר "שוויונות" אלו כלומר:
$(a-b)+(b-c)\approx 0+0$ כלומר $a-c\approx 0$ ז"א $a\approx c$ כדרוש.

3. הוכיחו כי לא קיים מס' אינסופי H ומס' ממשי r כך ש- $H\approx r$.

נניח בשלילה שקיימים H אינסופי ו- r ממשי כך ש- $H\approx r$, כלומר $H-r$ אינפיניטסימל, כלומר $x<H-r<x$ לכל x ממשי. כלומר $H<r+x$ לכל x ממשי, כלומר H איננו אינסופי חיובי (כי אינסופי חיובי גדול מכל מס' ממשי) וכן $H>r+x$ לכל x ממשי, כלומר H איננו אינסופי שלילי (כי אינסופי שלילי קטן מכל מס' ממשי), סתירה.

4. הוכיחו או הפריכו:

.i אם $a\approx b$, באשר a איננו אינפיניטסימל, אז $\frac{1}{a}\approx\frac{1}{b}$.

הטענה נכונה.
ראשית נשים לב כי גם b איננו אינפי', כי לו b היה אינפי' כלומר $b\approx 0$ היינו מקבלים $a\approx b\approx 0$ כלומר $a\approx 0$ (מתרגיל 2 לעיל) סתירה.
צריך להראות כי $\frac{1}{a}\approx\frac{1}{b}$ כלומר כי $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\approx 0$ כלומר כי $\frac{b-a}{ab}\approx 0$. המונה הוא אינפי' (כי $a\approx b$ לכן $a-b\approx 0$).

כמו כן המכנה איננו אינפי' כי a איננו אינפי' וכן b איננו אינפי'. כפי שלמדנו, אינפי' חלקי מס' שהוא משמעותי או אינסופי הוא אינפי'. ע"כ אכן $\frac{b-a}{ab}\approx 0$ כדרוש.

.ii אם $a\approx b$, באשר $a\neq 0, b\neq 0$, אז $\frac{1}{a}\approx\frac{1}{b}$..

הטענה לא נכונה. יהי ϵ אינפי' חיובי כלשהו ונבחר $a=\epsilon, b=2\epsilon$. ברור כי $a\approx b$ (כי שניהם אינפי'). כמו כן $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{\epsilon}-\frac{1}{2\epsilon}=\frac{2-1}{2\epsilon}=\frac{1}{2\epsilon}$. זהו מס' אינסופי (חילוק של מס' משמעותי במס' אינפי'). כלומר הראנו כי $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ הוא אינסופי, ובפרט הוא איננו אינפי', כדרוש.

5. מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות, לפי הגדרה:

.i $f(x)=3x^2-2x+1$

יהי $\Delta x\approx 0, \Delta x\neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{3(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+1-(3x^2-2x+1)}{\Delta x}=\frac{3x^2+6x\Delta x+\Delta x^2-2x-2\Delta x+1-3x^2+2x-1}{\Delta x}=$$
$$=\frac{6x\Delta x+\Delta x^2-2\Delta x}{\Delta x}=6x+\Delta x-2$$

כעת נוכל לקחת חלק סטנדרטי:

$$st(6x+\Delta x-2)=st(6x)+st(\Delta x)-st(2)=6x+0-2=6x-2$$

.ii $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

יהי $\Delta x\approx 0, \Delta x\neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2+1}-\frac{1}{x^2+1}}{\Delta x}=\frac{\frac{x^2+1-((x+\Delta x)^2+1)}{(x^2+1)((x+\Delta x)^2+1)}}{\Delta x}=\frac{\frac{x^2+1-x^2-2x\Delta x-\Delta x^2-1}{(x^2+1)((x+\Delta x)^2+1)}}{\Delta x}=\frac{\frac{-2x\Delta x-\Delta x^2}{(x^2+1)((x+\Delta x)^2+1)}}{\Delta x}=$$
$$=\frac{-2x-\Delta x}{(x^2+1)((x+\Delta x)^2+1)}$$

כעת נוכל לקחת חלק סטנדרטי:

$$st\left(\frac{-2x-\Delta x}{(x^2+1)((x+\Delta x)^2+1)}\right)=\frac{st(-2x-\Delta x)}{st((x^2+1)((x+\Delta x)^2+1))}=\frac{-2x}{(x^2+1)(x^2+1)}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

.iii $f(x)=\sqrt{6x^2+x+6}$

יהי $\Delta x\approx 0, \Delta x\neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}-\sqrt{6x^2+x+6}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{(\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}-\sqrt{6x^2+x+6})(\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6})}{\Delta x\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6}}=$$

$$=\frac{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6-6x^2-x-6}{\Delta x\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6}}=$$

$$=\frac{6x^2+12x\Delta x+6\Delta x^2+x+\Delta x+6-6x^2-x-6}{\Delta x\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6}}=$$

$$=\frac{12x\Delta x+6\Delta x^2+\Delta x}{\Delta x\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6}}=$$

$$=\frac{12x+6\Delta x+1}{\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6}}$$

כעת נוכל לקחת חלק סטנדרטי:

$$st\left(\frac{12x+6\Delta x+1}{\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6}}\right)=\frac{st(12x+6\Delta x+1)}{st(\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6})}=$$

$$=\frac{12x+1}{\sqrt{6x^2+x+6}+\sqrt{6x^2+x+6}}=\frac{12x+1}{2\sqrt{6x^2+x+6}}$$