תרגיל 2 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. האם קיים שיכון איזומטרי בין המרחבים הבאים? הוכיחו או הפריכו.
   (א) $\{\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5} \mid n\in\mathbb{N}\} \to \mathbb{Q}\cap(2016,\infty)$ (המטריקות כאן הן $d(x,y)=|x-y|$)
   (ב) $(\mathbb{Z},d_5)\to(\mathbb{Z},d_7)$

2. יהי (X,d) מרחב מטרי.
   (א) הוכיחו כי לכל $x\in X$ מתקיים כי $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X.
   (ב) תנו דוגמא נגדית לסעיף א' אם X הוא רק מרחב פסאודו מטרי.
   (ג) הוכיחו כי כל קבוצה סופית היא סגורה.

3. נביט על המרחב $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ של המספרים האי רציונלים עם המטריקה הסטנדרטית של $\mathbb{R}$. הראו כי הוא לא קשיר (למשל, הסתכלו על קבוצת האי רציונליים החיוביים, האם היא פתוחה? האם היא סגורה?).

4. הוכיחו שבמרחב $(\mathbb{Z},d_p)$ כל כדור פתוח שמרכזו באפס $B(0,r)$ הוא קבוצה סגוחה ותת חבורה.

5. יהי X המרחב המטרי של כל הסדרות מעל $\mathbb{R}$. המטריקה היא $d(a_n,b_n)=\frac{1}{m}$ כאשר m הוא האינדקס המינימלי שבו $a_m\neq b_m$. (כמובן אם הסדרות זהות המרחק הוא 0).
   (א) הוכיחו כי קבוצת הסדרות המתחילות ב $0,1,2$ או ב $3,4,5,6$ היא קבוצה פתוחה.
   (ב) הוכיחו כי קבוצת הסדרות הקבועות היא קבוצה סגורה.

6. הוכיחו/הפריכו: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ועל, אז $(\mathbb{R},d_f)$ הוא מרחב שלם, כאשר $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|$

7. הוכיחו/ הפריכו: המרחבים הבאים שלמים:
   (א) מרחב כל הסדרות הממשיות המתאפסות לבסוף, עם מטריקת הסופרימום.
   (ב) $\mathbb{R}^N$ עם המטריקה: $d((x_1,...,x_N),(y_1,...,y_N))=\max_i|x_i-y_i|$