מבחן מועד א תשע"ד־פתרון

16 ביוני 2018

חלק ב'
שאלה 3
א) מצאו את כל המספרים המרוכבים z המקיימים:

$$\bar{z} \cdot z^2 = z$$

ב) מצאו לאילו ערכים של k למערכת:

$$\begin{cases} x + y + kz = k \\ kx + ky + z = 1 \\ x + ky + kz = 2 \end{cases}$$

יש פתרון יחיד, יש אינסוף פתרונות, אין פתרון
פתרון:
א) מסמן: $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
אזי

$$\bar{z} \cdot z \cdot z = z$$

$$|z|^2 \cdot z - z = 0$$

$$z\left(|z|^2 - 1\right) = 0$$

ולכן $z = 0$ או $z^2 - 1 = x^2 + y^2 - 1 = 1$ כלומר $x^2 + y^2 = 1$ כלומר אלה כל המספרים שנמצאים על מעגל היחידה.
ב) נבנה מטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k \\ k & k & 1 & 1 \\ 1 & k & k & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k \\ 0 & k-1 & 0 & 2-k \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

אם $k=1$ אין פתרון כי אז נקבל שורת סתירה.
אם $k=-1$ נקבל שורת אפסים ואז יש אינסוף פתרונות
אחרת יש פתרון יחיד למערכת.

שאלה 4

נתונה מטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

א) מצאו הסיס ומימד לתתי מרחבים $C(A), N(A)$.
ב) מצאו את $C(A)$ בצורת תנאי
ג) השלימו את הסיס שמצאתם ל-$C(A)$ לבסיס ל-$\mathbb{R}^4$
ד) הראו שמה שקיבלתם זה סכום ישר.
ה) חשבו את $|A|$ והסבירו האם A הפיכה.

פתרון:

א) נדרג את המטריצה ונקבל אותה בצורה המדורגת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3-2R_1\to R_3}{\overset{R_3-R_1\to R_3}{=}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $C(A) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

קל לראות שהפתרון למערכת ההומוגנית הוא $t=0$, $y=0$, $x=-z$

$$N(A) = \left\{\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

ב) $C(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{cases} x+z+2t=0 \\ y+z=0 \\ -y+t=0 \end{cases}\right\}$

ג) נוסיף למשל את הוקטור: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

נראה שהוא בלתי תלוי בוקטורים האחרים ב־$C(A)$:
נבנה מטריצה אשר שורותיה הן וקטורי הבסיס למרחב העמודה של A ווקטור שהוספנו:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

קל לראות שהדרגה היא 4 ולכן הקטורים הם בת"ל ולכן מהווים בסיס ל־$\mathbb{R}^4$ ולכן

$$\mathbb{R}^4 = C(A) \bigcup span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ד) קודם כל כל ברור ש־$\mathbb{R}^4 = C(A) + span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ כי כל וקטור ב־$\mathbb{R}^4$ ניתן להצגה כצירוף לינארי של הוקטורי הבסיס של $C(A)$ ווקטור $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

שנית, החיתוך שלהם הוא ריק היא הוקטורים בת"ל ולכן הסכום הוא סכום ישר.
ה) הפתרון הוא מיידי כי למטריצה שלנו מרחב הפתרונות שונה מאפס ולכן למערכת ההומוגנית קיים פתרון לא טריוויאלי ולכן המטריצה אינה הפיכה ולכן $|A| = 0$

שאלה 5 (אין קשר בין הסעיפים)

א) פתרו בעזרת ההופכית את המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ב) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ונניח שקיים n טבעי כך ש־$A^n = 0$. הראו ש־$I - A$ הפיכה ומתקיים:

$$(I - A)^{-1} = I + A + ... + A^{n-1}$$

ג) האם קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ כך שקיים פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ומתקיים ש־$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ נמצא במרחב הנוצב למרחב העמודות ? מצאו אחת כזו או הסבירו מדוע אינה קיימת.

פתרון:

א) בעזרת האלגוריתם שלמדנו בכיתה נמצא שהמטריצה ההופכית ל־A היא

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c \\ -a-b-2c \\ -a-b-c \end{pmatrix}$$

ב)

$$(I-A)\left(I+A+...+A^{n-1}\right) = I+A+...+A^{n-1}-(A+A+...+A^n) = I-A^n \underset{A^n=0}{=} I$$

באותו אופן קל לראות ש־

$$\left(I+A+...+A^{n-1}\right)(I-A) = I$$

ולכן $I-A$ הפיכה וההופכית שלה היא $I+A+...+A^{n-1}$ היא ההופכית שלה.

ג) לא קיימת מטריצה כזו כי אז $rank(A)=3$ כי כדי שלמערכת יהיה פתרון נדרוש שיהיו 3 שורות שאינן שורות אפסים.

ולכן יש 3 עמודות בת"ל ולכן מהוות בסיס ל־$\mathbb{R}^3$ ולכן המרחב הניצב ל־$\mathbb{R}^3$ הוא מרחב האפס ולכן לא יתכן שבמרחב האפס יש וקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

שאלה 6

תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3. נגדיר את המטריצות הבאות:

$$C = \begin{pmatrix} A \\ A^T \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$$

שתיהן מסדר 6×3.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) $rank(A) = rank(B)$

ב) $rank(A) = rank(C)$

ג) קיימת A עבורה הדרגה של אחת המטריצות C, B היא בדיוק $2rank(A)$

ד) קיימת A עבורה הדרגה של אחת המטריצות היא גדולה מ־$2rank(A)$

פתרון:

א) לאחר דירוג נקבל את המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $rank(A) = rank(B)$.

ב) נבחר למ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $rank(C) = 2 > rank(A) = 1$

ג) דוגמה קודמת

ד) לא נכון. כאשר חיתוך של מרחב השורה של A ומרחב העמודה שלה ריק אזי שורותיה של A בלתי תלויות בשורותיה של A^t שכן העמודות של A הן שורות של A^t.

מימד מרחב העמודה של A זה מימד מרחב השורה של A^t והמימדים שלהם זהים. ולכן מימד של C יכול להיות לכל היותר $2rank(A)$.